



الرياضيات

السادس العلمي

المفيد في ثلاثية

2019

حيّد وليد

07701780364

MATHEMATICS

التطبيقي

الجزء الاول



WWW.IQ-RES.COM



@IQRES

قناتنا على التلي كرام

موقع طلاب العراق



موقع طلاب العراق

الأعداد المركبة

القطوع المخروطية

الفصل
الاول

الفصل
الثاني

بيت المغرب
بغداد - السعدون
بغداد - المتنبي
07702729223

السادس العلمي التطبيقي

2019

المفيد في ثلاثية

حيدر وليد

07701780364



موقع طلاب العراق

طبعة ثانية

مصححة

ومنقحة

عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب

تأكد من وجود

(الجلدة المدورة اللاصقة)

في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة

الجزء الاول

WWW.iQ-RES.COM

الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق



موقع طلاب العراق

” (... شارك رابط موقعنا ...)
مع اصدقائك لتعم الفائدة
ولا تنسونا من صالح دعائكم
“

نتائج

كتب

ملازم

أخبار

أسئلة

التعليم العالي

وزارة التربية

تابعونا ..



@iQRES



/ iQRES



/ NTAAj.iQ

كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي

الفصل الاول

مدخل الى موضوع

الأعداد

المركبة



“

تابعونا على التلي كرام

@iQRES

”

مدخل الى موضوع الاعداد المركبة

نعلم ان الجذور التربيعية للاعداد الموجبة هي :

$$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{100} = 10$$

اي هناك قيمة لعدد موجب تحت الجذر التربيعي .
ولكن :

$$\sqrt{-9} = ? \quad \begin{cases} \text{(خطأ) } 3 \\ \text{(خطأ) } -3 \end{cases}, \quad \sqrt{-16} = ? \quad \begin{cases} \text{(خطأ) } 4 \\ \text{(خطأ) } -4 \end{cases}$$

اذن لا توجد قيمة حقيقية لعدد سالب تحت الجذر التربيعي .
أو جذر دليله زوجي مثل : $\sqrt[8]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[6]{}$... الخ .

لذلك :

نفرض ان هناك قيمة لعدد سالب تحت الجذر التربيعي هو (i)

$$\sqrt{-1} = i \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$$

وبترتيب المعادلة الاخيرة

$$i^4 = 1$$

خلاصة :

حفظ

$$i^2 = -1$$

$$i^4 = 1$$

$$i^3 = (i^2)(i)$$

$$i^3 = (-1)(i)$$

$$i^3 = -i$$

استراحة شعرية :

ما مرّ ذكرك إلا وابتسمت له
كأنك العيد والباقيون أيام
أو هيام طيفك إلا طرت اتبعه
أنت الحقيقة والجلّاس أو هيام

كيف نكتب عدد سالب تحت الجذر التربيعي بدلالة (i):

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}$ $= 4i$	$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}$ $= 5i$	$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}$ $= 6i$
$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{4 \times 3} (i) = 2\sqrt{3}i$	$\sqrt{-18} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{9 \times 2} (i) = 3\sqrt{2}i$	$\sqrt{-20} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{5 \times 4} (i) = 2\sqrt{5}i$

تعريف:

العدد المركب: هو العدد الذي يكتب بصيغة $(a+bi)$ حيث يسمى:

a جزؤه الحقيقي

b جزؤه التخيلي

$a, b \in \mathbb{R}$

يُرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز \mathbb{C}

موقع طلاب العراق

الصيغة العادية للعدد المركب.

أو الصيغة الجبرية للعدد المركب.

* تسمى الصيغة $a+bi$

* يمكن كتابة العدد المركب بشكل زوج مرتب (a, b) وتسمى الصيغة الديكارتية للعدد المركب.

العدد المركب الصيغة الجبرية	الصيغة الديكارتية	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$2 + 3i$	$(2, 3)$	2	3
$-2 - 3i$	$(-2, -3)$	-2	-3
$\sqrt{3} - i$	$(\sqrt{3}, -1)$	$\sqrt{3}$	-1
$2i$	$(0, 2)$	0	2
3	$(3, 0)$	3	0

$$\rightarrow 2i = 0 + 2i$$

$$\rightarrow 3 = 3 + 0i$$

قوى (i)

عند تبسيط i^n نقسم الأس على 4 وكما في الصيغة التالية:

$$i^n = (i^4)^{\text{القسمه}} \cdot (i)^{\text{البقي}}$$

$$i^n = \{i, -i, 1, -1\}$$

1 = الباقي 2 = الباقي
3 = الباقي 0 = الباقي

بسط ما يلي:

مثال

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad i^{999} &= (i^4)^{249} \cdot i^3 \\ &= (1)^{249} (-i) = -i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad i^{25} &= (i^4)^6 \cdot (i)^1 \\ &= (1)^6 \cdot i = i \end{aligned}$$

باقي القسمه ناتج القسمه على (4)

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad i^{4n+1} &= (i^4)^n \cdot i \\ &= (1)^n \cdot i = i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad i^{58} &= (i^4)^{14} \cdot i^2 \\ &= (1)^{14} \cdot i^2 = 1 * -1 = -1 \end{aligned}$$

ناتج i^n هو:

$$\{i, -i, 1, -1\}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad i^5 &= (i^4)^1 \cdot i \\ &= 1 (i) = i \end{aligned}$$

جد ناتج:

سؤال إضافي

$$\begin{aligned} i^{6n+1} &= (i^6)^n \cdot i \\ &= (-1)^n i \end{aligned}$$

عندما n = عدد زوجي

$$(-1)^n = 1 \Rightarrow i^{6n+1} = i$$

عندما n = عدد فردي

$$(-1)^n = -1 \Rightarrow i^{6n+1} = -i$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad i^6 &= (i^4)^1 \cdot i^2 \\ &= (1) (-1) = -1 \end{aligned}$$

ملاحظة

إذا كان الأس سالب ينزل للمقام ونغير الإشارة ثم نبسط كما سبق وبعدها نضرب الكسور (i^4) حيث $i^4 = 1$ أي لا نأثر على الكسر (يُعتبر الضرب في واحد).

7 i^{-17}

$$= \frac{1}{i^{17}} = \frac{1}{(i^4)^4 \cdot i} = \frac{1}{i} (i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

8 i^{-13}

$$= \frac{1}{(i^4)^3 \cdot i} = \frac{1}{i} (i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

اتفاق

كل سؤال في أي موضوع في هذا الفصل عندما نرى i مرفوعة إلى الأس نقوم بتبسيط (i) قبل التفكير بأي شيء، مهما كان السؤال (ونبسط كما في الطريقة السابقة).

Notes:



WWW.IQ-RES.COM



@IQRES



/IQRES

موقع طلاب العراق

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

في مجموعة الأعداد المركبة يوجد عمليات رياضية كالتي مرت عليك (الجمع - الطرح - الضرب - القسمة - الجذور التربيعية والتكعيبية - النظير الجمعي والضربي ... الخ) وسنتطرق إليها بالتفصيل.

أولاً: عملية الجمع: عند جمع عددين مركبين نجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي وبحسب الإشارة.

جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي:

مثال

$$\begin{aligned} 6 \quad & \left(\frac{5}{2} - i\right) + \left(\frac{1}{5} + 2i\right) \\ & \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\right) + (-i + 2i) \\ & \frac{27}{10} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad & (3 + 4i) + (2 + 5i) \\ & (3 + 2) + (4i + 5i) = 5 + 9i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & (5 + 7i) + (-3 - 9i) \\ & (5 - 3) + (7i - 9i) = 2 - 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad & (-7 + 2i) + (2 - 5i) \\ & (-7 + 2) + (2i - 5i) = -5 - 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad & (3 + 4\sqrt{2}i) + (-3 - 2\sqrt{2}i) \\ & (3 - 3) + (4\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i) = 0 + 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad & 3 + 2 - 5i \\ & (3 + 0i) + (2 - 5i) \\ & (3 + 2) + (0i - 5i) = 5 - 5i \end{aligned}$$

ثانياً: عملية الطرح: عند الطرح يتم توزيع اشارة السالب على القوس ثم نجري عملية الجمع أو الطرح بحسب الاشارات .

مثال

جد ناتج ما يأتي:

3 $(3\sqrt{2} + \sqrt{5}i) - (\sqrt{2} + 3\sqrt{5}i)$

$$(3\sqrt{2} + \sqrt{5}i) + (-\sqrt{2} - 3\sqrt{5}i)$$

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5}i - 3\sqrt{5}i) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}i$$

1 $(7 - 13i) - (9 + 4i)$

$$(7 - 13i) + (-9 - 4i)$$

$$(7 - 9) + (-13 - 4i) = -2 - 17i$$

4 $3 - (5 - 3i)$

$$(3 + 0i) + (-5 + 3i)$$

$$(3 - 5) + (0i + 3i) = -2 + 3i$$

2 $(5 + 3i) - (2 - 4i)$

$$(5 + 3i) + (-2 + 4i)$$

$$(5 - 2) + (3i + 4i) = 3 + 7i$$

ثالثاً: عملية الضرب: عند ضرب عددين مركبين نوزع الاقواس. هنا تذكر أن $(i^2 = -1)$.

مثال

جد ناتج ما يأتي:

3 $(10 + 3i)(0 + 6i)$

$$0 + 60i + 0i + 18i^2 = -18 + 60i$$

((نعكس))

4 $(2 + 3i)(-3 + 5i)$

$$-6 + 10i - 9i + 15i^2$$

$$-6 + i - 15 = -21 + i$$

5 $i(1 + i) = i + i^2 = -1 + i$

6 $\frac{-5}{2}(4 + 3i) = (\frac{-5}{2} \times 4) + (\frac{-5}{2} \times 3i)$

$$= -10 - \frac{15}{2}i$$

1 $(3 + 2i)(5 + 4i)$

$$15 + 12i + 10i + 8i^2$$

$$15 + 22i - 8 = 7 + 22i$$

((i^2 تعكس اشارة ما قبلها وتحذف))

2 $(2 - 3i)(3 + 5i)$

$$6 + 10i - 9i - 15i^2$$

طرح

$$6 + i + 15 = 21 + i$$

((نعكس الاشارة وتحذف))

زوروا موقعنا للمزيد
WWW.IQ-RES.COM



والإبقاء عملية التسمية قبل التطرق الى القسمة يجب التعرف على مرافق العدد المركب.

مرافق العدد المركب:

$$C = a + bi \Rightarrow \bar{C} = a - bi$$

هو عكس اشارة الجزء التخيلي للعدد

المركب فقط. نرمز له بالرمز \bar{C} .

$$C_1 = 2 + 3i \rightarrow \bar{C}_1 = 2 - 3i$$

$$C_2 = 4 + 5i \rightarrow \bar{C}_2 = 4 - 5i$$

$$\overline{1 + i} = 1 - i$$

انتبه!

$$\left[\begin{array}{l} C_1 = -3 + 4i \\ C_2 = 3 - 4i \end{array} \right. \text{ غير مترافقات لأن اشارة الجزء الحقيقي تغيرت أيضاً.}$$

$$\left[\begin{array}{l} C_1 = (3i - 5) \\ C_2 = (-3i - 5) \end{array} \right. \text{ العددين مترافقان لأن اشارة الجزء التخيلي هي فقط التي تغيرت والاختلاف فقط في الترتيب.}$$

عند ضرب عددين مترافقين فيكون الناتج:

$$(C \cdot \bar{C} = a^2 + b^2)$$

$$(\text{التخيلي})^2 + (\text{الحقيقي})^2$$

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم نأخذه

انتبه!

$$(1 - i)(1 + i) = (1)^2 + (1)^2 = 2$$

الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

انتبه!

$$(-2 + i)(-2 - i) = (-2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$$

الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

انتبه!



* عند وجود البسط والمقام في الأعداد المركبة نضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب الموجود في المقام.

$$\frac{\text{بسط}}{\text{مقام (i)}} \times \frac{\text{مرافق المقام}}{\text{مرافق المقام}} \quad \text{ممنوع (i) بالمقام i مقام = مرافق}$$

جد ناتج ما يأتي بصيغة $a + bi$

مثال

$$\begin{aligned} 4 \quad \frac{1 + 2i}{-2 + i} &= \frac{1 + 2i}{-2 + i} \cdot \frac{-2 - i}{-2 - i} \\ &= \frac{-2 - i - 4i - 2i^2}{(-2)^2 + (1)^2} = +2 \\ &= \frac{-2 - 5i + 2}{5} = \frac{-5i}{5} = 0 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad \frac{3 + 4i}{3 - 4i} &= \frac{3 + 4i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} \quad ((\text{مترافقات})) \\ &= \frac{9 + 12i + 12i + 16i^2}{(3)^2 + (4)^2} \\ &= \frac{-7 + 24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \frac{12 + i}{i} &= \frac{12 + i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \\ &= \frac{-12i - i^2}{0 + 1} = \frac{1 - 12i}{1} \\ &= 1 - 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \frac{2 - i}{3 + 4i} &= \frac{2 - i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \\ &= \frac{6 - 8i - 3i + 4i^2}{(3)^2 + (4)^2} = (-4) \\ &= \frac{2 - 11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad \frac{i}{2 + 3i} &= \frac{i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ &= \frac{2i - 3i^2}{(2)^2 + (3)^2} \\ &= \frac{3 + 2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \frac{1 + i}{1 - i} &= \frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= \frac{1 + i + i + i^2}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{2i}{2} = i \\ &= 0 + i \end{aligned}$$



π

7 $Z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}$

π

$$Z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$$

π

$$Z = \frac{1 - \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 3}{1 + 3} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4}$$

π

$$Z = \frac{-2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}i = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

π

8

$$Z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7 - 14\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 6}{1 + 12} = \frac{13 - 13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z = \frac{13}{13} - \frac{13\sqrt{3}}{13}i = 1 - \sqrt{3}i$$

خامساً النظير الضربي هو مقلوب العدد المركب $\frac{1}{C}$ أو C^{-1}

مثال

جد النظير الضربي لعدد $C = 2 - 2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2 - 2i} \cdot \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{2 + 2i}{2^2 + 2^2} = \frac{2 + 2i}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2}{8}i$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

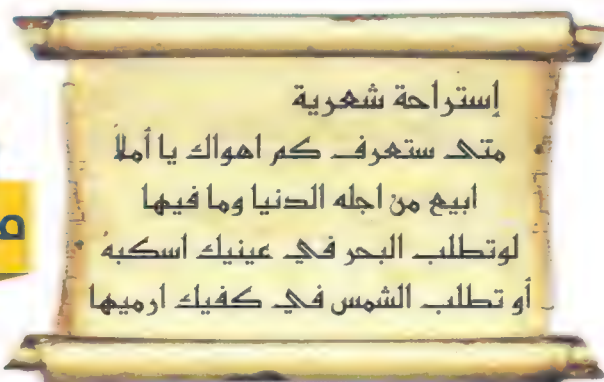
سادساً النظير الجمعي هو عكس العدد المركب في الإشارة $(-C)$.

$$\begin{aligned} C = 2 + 3i &\rightarrow -C = -2 - 3i \\ C = 3 + 7i &\rightarrow -C = -3 - 7i \\ C = 3 + i &\rightarrow -C = -3 - i \\ C = -2 + 2i &\rightarrow -C = 2 - 2i \end{aligned}$$

مجموع عدد مركب ونظيره الجمعي = صفر



موقع طلاب العراق



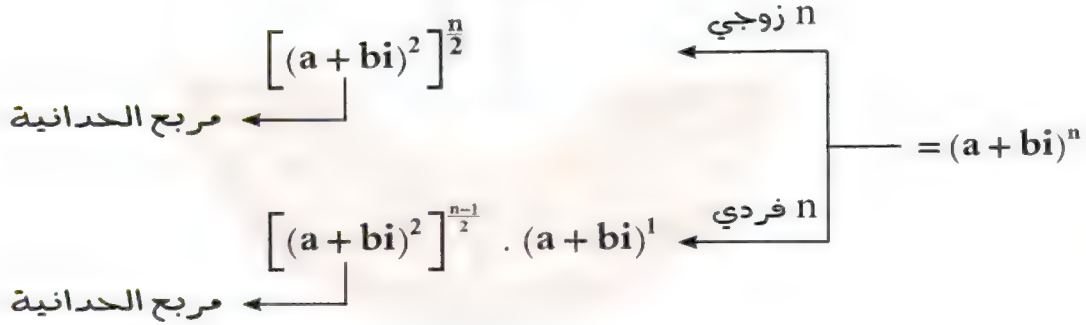
القوس المرفوع إلى الاس

أولاً: إذا كان القوس $(a + bi)^2$ نفتح القوس مربع حدانية.

ثانياً: إذا كان القوس $(a + bi)^3$ نجزء القوس 1 (2) نفتح التربيع مربع حدانية ثم نضرب الناتج بالقوس الثاني.

ثالثاً: إذا كان القوس $(a + bi)^4$ يصبح $[(a + bi)^2]^2$ ثم نفتح القوس مربع حدانية والناتج أيضاً مربع حدانية.

رابعاً: القوى الأكبر:



خامساً: إذا كان لدينا $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$.

نتخلص من البسط والمقام بالدرجة الأولى (نضرب داخل القوس في المرافق).

بعد وضع داخل القوس بصيغة $a + bi$ نفتح الاس بحسب السؤال. (راجع مثال رقم 6)

في صفحة 15 والسؤال الثاني في صفحة 18).

ضـح بصـورة $a + bi$

مثال 1

((نفتح التـربـيح مـربع حـدانية)) $(3 + 4i)^2$

$$(3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2$$

i^2 نحذف ونعكس
الشارة ما قبلها

$$= -7 + 24i$$

ضـح بالصـيغة العـادية للـعدد الـهـركـب:

مثال 2

$$(2 + 3i)^2 + (12 + 2i)^2$$

$$(4 + 12i + 9i^2) + (144 + 48i + 4i^2)$$

$$4 + 12i - 9 + 144 + 48i - 4$$

$$(4 - 9 + 144 - 4) + (12i + 48i) = 135 + 60i$$

تخييلي حقيقي

ضـح بصـورة $a + bi$

مثال 3

$$(1 + i)^2 + (1 - i)^2$$

$$(1 + 2i + i^2) + (1 - 2i + i^2)$$

$$(1 + 2i - 1) + (1 - 2i - 1) = 0 + 0i$$

ضـح بصـورة $a + bi$

مثال 4

$$(1 + i)^4 - (1 - i)^4$$

$$[(1 + i)^2]^2 - [(1 - i)^2]^2$$

$$(1 + 2i - 1)^2 - (1 - 2i - 1)^2$$

$$(2i)^2 - (-2i)^2$$

$$4i^2 - 4i^2 = 0 + 0i$$

ضـح بالصـيغة العـادية للـعدد الـهـركـب:

مثال 5

$$(1 + i)^3 + (1 - i)^3$$

$$(1 + i)^2 (1 + i) + (1 - i)^2 (1 - i)$$

$$(1 + 2i - 1)(1 + i) + (1 - 2i - 1)(1 - i)$$

$$2i(1 + i) - 2i(1 - i)$$

$$2i + 2i^2 - 2i + 2i^2 = 4i^2 = -4 + 0i$$

ضـح بالصـيغة الجـبرية للـعدد

مثال 6

الـهـركـب $:\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3 - 3i + i - i^2}{(1)^2 + (1)^2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{4 - 2i}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{2} - \frac{2}{2}i\right)^3$$

$$= (2 - i)^3 = (2 - i)^2 (2 - i)$$

$$= (4 - 4i - 1)(2 - i)$$

$$= (3 - 4i)(2 - i) \text{ توزيع}$$

$$= 6 - 3i - 8i - 4$$

$$= 2 - 11i$$



مثال

إثبت أن:

$$(1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3) = 4$$

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= (1 - i)(1 + 1)(1 - (-i)) \\ &= 2(1 - i)(1 + i) \\ &\text{مترافقان} \\ &= 2(1^2 + 1^2) \\ &= 2(2) = 4 = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

تذكر

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \end{aligned}$$

مثال

إثبت أن:

$$\frac{1}{(2 - i)^2} - \frac{1}{(2 + i)^2} = \frac{8}{25} i$$

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{1}{4 - 4i - 1} - \frac{1}{4 + 4i - 1} \\ &= \frac{1}{3 - 4i} - \frac{1}{3 + 4i} \\ &= \left(\frac{1}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} \right) - \left(\frac{1}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \right) \text{ مرافق} \\ &= \frac{3 + 4i}{25} - \frac{3 - 4i}{25} = \frac{(3 + 4i) - (3 - 4i)}{25} \\ &= \frac{\cancel{3} + 4i - \cancel{3} + 4i}{25} = \frac{8}{25} i = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

مثال

إثبت أن:

$$\frac{(1 - i)^2}{1 + i} + \frac{(1 + i)^2}{1 - i} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{\cancel{1} - 2i - \cancel{1}}{1 + i} + \frac{\cancel{1} + 2i - \cancel{1}}{1 - i} \\ &= \left(\frac{-2i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} \right) + \left(\frac{2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \right) \\ &= \frac{-2i - 2}{(1)^2 + (1)^2} + \frac{2i - 2}{(1)^2 + (1)^2} \\ &= \frac{-\cancel{2}i - 2 + \cancel{2}i - 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ &= \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

مثال

ضع بصورة $a + bi$

$$\begin{aligned} \frac{2 + 3i}{1 - i} \times \frac{1 + 4i}{4 + i} &= \frac{2 + 8i + 3i - 12}{4 + i - 4i + 1} \\ &= \frac{-10 + 11i}{5 - 3i} = \frac{-10 + 11i}{5 - 3i} \cdot \frac{5 + 3i}{5 + 3i} \\ &= \frac{-50 - 30i + 55i - 33}{5^2 + 3^2} \\ &= \frac{-83 + 25i}{34} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34} i \end{aligned}$$



إذا كانت $C_1 = 1+i$, $C_2 = 3-2i$ تحقق من أن:

$$\overline{C_1 \cdot C_2} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2}$$

L.H.S

$$\begin{aligned} \overline{C_1 \cdot C_2} &= \overline{(1+i)(3-2i)} \\ &= \overline{3-2i+3i+2} = \overline{5+i} \\ &= 5-i \end{aligned}$$

R.H.S

$$\begin{aligned} \overline{C_1} \cdot \overline{C_2} &= \overline{(1+i)} \cdot \overline{(3-2i)} \\ &= (1-i)(3+2i) \\ &= 3+2i-3i+2 = 5-i \end{aligned}$$

R.H.S = L.H.S

$$\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{3+2i+3i-2}{3^2+2^2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+5i}{9+4}\right)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} &= \frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}} = \frac{1-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} \\ &= \frac{3-2i-3i-2}{(3)^2+(2)^2} = \frac{1-5i}{13} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

R.H.S = L.H.S

$$\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$$

L.H.S

$$\begin{aligned} \overline{C_1 + C_2} &= \overline{(1+i)+(3-2i)} \\ &= \overline{4-i} = 4+i \end{aligned}$$

R.H.S

$$\begin{aligned} \overline{C_1} + \overline{C_2} &= \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)} \\ &= (1-i) + (3+2i) \\ &= 4+i \end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S

$$\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$$

L.H.S $\overline{C_1 - C_2}$

$$\begin{aligned} &= \overline{(1+i)-(3-2i)} \\ &= \overline{(1+i)+(-3+2i)} = \overline{-2+3i} \\ &= -2-3i \end{aligned}$$

R.H.S $\overline{C_1} - \overline{C_2}$

$$\begin{aligned} &= \overline{(1+i)} - \overline{(3-2i)} \\ &= (1-i) - (3+2i) \\ &= (1-i)+(-3-2i) = -2-3i \end{aligned}$$

R.H.S = L.H.S

مسئلة وزارية حول الحالات السابقة

سؤال 4

ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي .

$$(3+2i)(-2+i)$$

$$-6+3i-4i-2 = -8-i$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{-8-i} \cdot \frac{-8+i}{-8+i}$$

$$= \frac{-8+i}{(-8)^2 + (-1)^2} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i$$

(1) د - 2002

سؤال 5

جد النظير الضربي للعدد المركب $(3+5i)$ ثم ضعه بالصيغة العادية .

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i}$$

$$= \frac{3-5i}{(3)^2 + (5)^2} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$$

(1) د - 2003

سؤال 6

جد الصيغة العادية للعدد المركب :

$$(1-\sqrt{3}i)^2 - (2-\sqrt{3}i)^2$$

$$(1-2\sqrt{3}i-3)-(4-4\sqrt{3}i-3)$$

$$(-2-2\sqrt{3}i)-(1-4\sqrt{3}i)$$

$$(-2-2\sqrt{3}i)+(-1+4\sqrt{3}i) = -3+2\sqrt{3}i$$

(2) د - 2004

سؤال 7

جد ناتج ما يأتي بالصيغة الديكارتية :

$$(3+4i)^2 + (5-3i)(1+i)$$

$$(9+24i-16)+(5+5i-3i+3)$$

$$(-7+24i)+(8+2i)$$

$$(-7+8)+(24i+2i) = 1+26i$$

(1.26)

(1) د - 2005

سؤال 1

ضع بالصورة العادية للعدد المركب :

$$(1+3i)^2 + (3-2i)^2$$

$$(1+6i-9)+(9-12i-4)$$

$$(-8+6i)+(5-12i)$$

$$(-8+5)+(6i-12i) = -3-6i$$

(1) د - 1998

سؤال 2

ضع بالصورة العادية للعدد المركب :

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3-3i-i-1}{(1)^2 + (1)^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2-4i}{2}\right)^2 = (1-2i)^2$$

$$= 1-4i-4 = -3-4i$$

(1) د - 1999

سؤال 3

إذا كان $y = 3-i$, $x = 2+3i$ إذا كان

$$x^2 + 2y^2$$

نعوض x, y بالعلامة اعلاه

$$(2+3i)^2 + 2(3-i)^2$$

$$(4+12i-9)+2(9-6i-1)$$

$$-5+12i+18-12i-2 = 11+0i$$

(1) د - 2000

سؤال 10

ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية.

2013
خارج القطر

$$\begin{aligned}\frac{(1-i)^{13}}{64} &= \frac{[(1-i)^2]^6 \cdot (1-i)}{64} \\ &= \frac{(\cancel{1} - 2i + \cancel{1})^6 (1-i)}{64} \\ &= \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64} \\ &= \frac{\cancel{64}i^6 (1-i)}{\cancel{64}} = -1(1-i) = -1+i\end{aligned}$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2$$

$$= (1)(-1) = -1$$

توضيح

إستراحة شعرية

يكفي بأنني مُذ وجدتك صرت أعرف ما أريد
ووجدت روحي خلف بسمتك التي صارت بها
الأيام عيد
بالله قل لي... كيف احلم بالمزيد؟!

تابعونا على التليكرام

@iQRES



سؤال 8

إذا كان $x = 2i - 1$
جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

2000
خارج القطر

$$\begin{aligned}x &= -1 + 2i \quad (\text{ترتيب}) \\ (-1 + 2i)^2 + 2(-1 + 2i) + 6 \\ (1 - 4i - 4) - 2 + 4i + 6 \\ -3 - \cancel{4i} + 4 + \cancel{4i} &= 1 + 0i\end{aligned}$$

سؤال 9

ضع بالصورة العادية للعدد المركب:

2012 - د (2)

$$\begin{aligned}(1+i)^5 - (1-i)^5 \\ (1+i)^5 &= [(1+i)^2]^2 (1+i) \\ &= (\cancel{1} + 2i + \cancel{i^2})^2 (1+i) \\ &= (2i)^2 (1+i) = 4i^2 (1+i) \\ &= -4(1+i) = -4 - 4i \\ (1-i)^5 &= [(1-i)^2]^2 (1-i) \\ &= (\cancel{1} - 2i + \cancel{i^2})^2 (1-i) \\ &= (-2i)^2 (1-i) = 4i^2 (1-i) \\ &= -4(1-i) = -4 + 4i \\ (1+i)^5 - (1-i)^5 \\ (-4 - 4i) - (-4 + 4i) \\ (-4 - 4i) + (4 - 4i) &= 0 - 8i\end{aligned}$$

التحليل في مجموعة الاعداد المركبة

أولاً: مجموع مربعين: عندما يكون لدينا مجموع مربعين $(x^2 + y^2)$ نضرب الحد الثاني بـ $(-i^2)$ ثم يصبح فرق بين مربعين ونحلل.
أي: نضع i^2 مع الحد الثاني ونعكس اشارته.

1 $x^2 + y^2$
 $x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$

2 $x^2 + 4$
 $x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$

3 $a^2 + 36b^2$
 $a^2 - 36b^2 i^2 = (a + 6bi)(a - 6bi)$

4 $y^2 + 100$
 $y^2 - 100i^2 = (y - 10i)(y + 10i)$

ملاحظة إذا طلب في السؤال تحليل عدد الى حاصل ضرب عددين مركبين يكون التحليل كما ورد اعلاه. (مجموع مربعين).

$1^2=1$

$2^2=4$

$3^2=9$

$4^2=16$

$5^2=25$

$6^2=36$

$7^2=49$

$8^2=64$

$9^2=81$

$10^2=100$

$11^2=121$

$12^2=144$

$13^2=169$

$14^2=196$

$15^2=225$

* عندما يعطي في السؤال رقم نبحت عن عددين من الارقام اعلاه عند جمعهم يعطي العدد الذي في السؤال ويصبح مجموع مربعين.

مثلاً: العدد 25 ← $16 + 9$
العدد 85 ← $81 + 4$
وبعدها نغير اشارة الـ + الى - ونضع i^2 ونحلل كما في الامثلة:

مثال

حل كل ما يأتي الى حاصل ضرب عاملين بصورة $a+bi$



$$10 = 9 + 1$$

$$= 9 - i^2$$

$$= (3 - i)(3 + i)$$

أو

$$10 = 1 + 9$$

$$= 1 - 9i^2$$

$$= (1 - 3i)(1 + 3i)$$



$$29 = 25 + 4$$

$$= 25 - 4i^2$$

$$= (5 - 2i)(5 + 2i)$$

أو

$$29 = 4 + 25$$

$$= 4 - 25i^2$$

$$= (2 - 5i)(2 + 5i)$$



$$41 = 25 + 16$$

$$= 25 - 16i^2$$

$$= (5 - 4i)(5 + 4i)$$

أو

$$41 = 16 + 25$$

$$= 16 - 25i^2$$

$$= (4 - 5i)(4 + 5i)$$



$$53 = 4 + 49$$

$$= 4 - 9i^2$$

$$= (2 - 7i)(2 + 7i)$$

أو

$$53 = 49 + 4$$

$$= 49 - 4i^2$$

$$= (7 - 2i)(7 + 2i)$$



$$85 = 81 + 4$$

$$= 81 - 4i^2$$

$$= (9 - 2i)(9 + 2i)$$

أو

$$85 = 4 + 81$$

$$= 4 - 81i^2$$

$$= (2 - 9i)(2 + 9i)$$



$$125 = 121 + 4$$

$$= 121 - 4i^2$$

$$= (11 - 2i)(11 + 2i)$$

أو

$$125 = 4 + 121$$

$$= 4 - 121i^2$$

$$= (2 - 11i)(2 + 11i)$$

هناك سؤال غالباً ما يرد في اسئلة الامتحانات الشهرية لبعض المدارس وهي كفكرة غير واردة بشكل صريح في المنهج سوف نتطرق اليها من باب الاحتياط.

ملاحظة

دون الضرب بالمرافق ضح بصورة $a+bi$



سؤال

((هذه هي صيغة السؤال))

أولاً: إذا اعطى في البسط عدد قابل للتحليل مباشرة والاختصار مع المقام مثلاً:

$$1 \quad \frac{25}{3+4i} \Rightarrow \frac{9+16}{3+4i} = \frac{9-16i^2}{3+4i} = \frac{(3-4i)(3+4i)}{(3+4i)} = 3-4i$$

$$2 \quad \frac{73}{8-3i} \Rightarrow \frac{64+9}{8-3i} = \frac{64-9i^2}{8-3i} = \frac{(8-3i)(8+3i)}{(8-3i)} = 8+3i$$

ثانياً: إذا كان العدد يحتاج إلى تجزئة مثلاً:

$$3 \quad \frac{40}{1+3i} = \frac{4(10)}{1+3i} = \frac{4(1+9)}{1+3i} = \frac{4(1-9i^2)}{1+3i} = \frac{4(1-3i)(1+3i)}{(1+3i)} = 4-12i$$

أنظر أن المقام هو $10 = 1^2 + 3^2$ والعدد في الأعلى 40 لذلك نقول $4(10)$

أما الأمثلة ((الأولى والثانية)) المقام $\begin{cases} 3^2 + 4^2 = 25 \\ 8^2 + 3^2 = 73 \end{cases}$ العدد موجود مباشرة نحلل

ثالثاً: إذا كان البسط لا يحوي عدد للتحليل فأنا نضرب الكسر بـ:

$$^2(\text{التخيلي}) + ^2(\text{الحقيقي}) \text{ التوضيح في المثال:}$$

$$\frac{3-i}{2+i}$$

نأخذ المقام

$$\begin{array}{c} 2+i \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2^2 \quad \quad 1^2 \end{array}$$

$$2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

نضرب البسط $\times \frac{5}{5}$ ونحلل الـ (5) التي في البسط وكما يلي:

$$\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{5}{5} \quad \text{تحلل}$$

$$\begin{aligned} \frac{3-i}{2+i} \cdot \left(\frac{4+1}{5}\right) &\Rightarrow \frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{4-i^2}{5} \Rightarrow \frac{3-i}{\cancel{(2+i)}} \cdot \frac{\cancel{(2+i)}(2-i)}{5} \\ &= \frac{(3-i)(2-i)}{5} \\ &= \frac{6-3i-2i}{5} = \frac{5-5i}{5} \\ &= 1-i \end{aligned}$$



ثانياً: مجموع مكعبين / فرق بين مكعبين : نضرب الحد الثاني بـ $(-i^2)$ ثم نحلل (فرق / مجموع) مكعبين .

$$x^3 - 27i$$

قانون مكعبين

تذكر

$$x^3 + 27i^3 = (x + 3i)(x^2 - 3xi - 9)$$

مربع الأول (عكس الاشارة) الأول \times الثاني + مربع الثاني

ثالثاً: التجربة: في حالة وجود (i) في الحد الوسط نضرب الأخير بـ $(-i^2)$ ثم نحلل تجربه .

$$x^2 - 3ix + 4$$

$$x^2 - 3ix - 4i^2 = (x + i)(x - 4i)$$

$$x^2 + xi + 6$$

$$x^2 + xi - 6i^2 = (x + 3i)(x - 2i)$$

رابعاً: آمال المربع: عندما لا يحلل السؤال بالتجربة ولا يوجد (i) في الوسط نضيف $\left(\frac{1}{2} \text{ معامل } x\right)^2$ ونطرقه .

$$x^2 + 6x + 25$$

نضيف معامل x هو (3)

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + 25$$

تربيع (3) هو 9

نضيف 9 ونطرح 9

$$(x + 3)^2 + 16$$

أصبح مجموع مربعين

$$(x + 3)^2 - 16i^2$$

$$(x + 3 + 4i)(x + 3 - 4i)$$



ايجاد قيم $x, y \in \mathbb{R}$

أولاً: أنظر إلى السؤال بتركيز وقم بفتح الأقواس أن وجدت والتخلص من التربيع والتكعيب ... الخ .

ثانياً: حاول تصفية الطرفين بحيث يصبح

الحقيقي = الحقيقي

التخيلي = التخيلي (نأخذ المعاملات فقط بدون i)

ثالثاً: انتبه لوجود التحليل "فرق مربعين / تجربة / عدد ... الخ"

رابعاً: لا تقوم بضرب المرافق في حالة وجود x أو y في البسط أو المقام وحاول أن تجد مخرج آخر لحل السؤال حسب الصيغة .

خامساً: إذا أعطى في السؤال مقدارين وذكر عبارة ان المقدارين مترافقان فنتبع الخطوات التالية:

- 1- نقوم بوضع علامة (=) بين المقدارين مع تغيير اشارة الجزء التخيلي لأحد الأطراف فقط .
- 2- نقوم بتصفية الاطراف بحسب الملاحظات كالضرب بالمرافق أو فتح التربيع أو غيرها ثم نكمل الحل .

راجع مثال (9) ومثال (10)



مثال 1

جد قيم x, y الحقيقيتين:

$$3x + 4i = 2 + 8yi$$

التخيلي = التخيلي
الحقيقي = الحقيقي

$$(3x = 2) \div 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(8y = 4) \div 8 \Rightarrow y = \frac{4}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

مثال 3

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$$

تخيلي
حقيقي

$$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 1 + 1 \Rightarrow [2x = 2] \div 2 \Rightarrow x = 1$$

$$y + 1 = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1$$

مثال 2

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$

$$2y + 1 - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

$$(2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

تخيلي
حقيقي

$$2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -8 - 1$$

$$[2y = -9] \div 2$$

$$y = \frac{-9}{2}$$

$$-(2x - 1) = 3$$

$$-2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 3 - 1$$

$$[-2x = 2] \div -2$$

$$x = -1$$

مثال 4

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

((نفتح الأقواس))

$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi - 2$$

جمع

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$

$$[5x = 5] \div 5 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 2x^2 - 2$$

$$y = 2(1)^2 - 2$$

$$y = 2 - 2 \Rightarrow y = 0$$



5

مثال

جد قيمة كل من x, y الحقيقيتين
واللتان تحققان المعادلة.

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + x + yi = (1+2i)^2$$

مُرافق مربع حدانية

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + x + yi = 1 + 4i - 4$$

$$\left(\frac{1-i-i-i}{1^2+1^2}\right) + x + yi = -3 + 4i$$

$$\frac{-2i}{2} + x + yi = -3 + 4i$$

$$x + yi = -3 + 5i$$

$$x = -3$$

$$y = 5$$

6

مثال

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$

$$8i = (x+2i)(y+2i) + 1$$

فتح الأقواس

$$8i = xy + 2xi + 2yi - 4 + 1$$

$$0 + 8i = (xy - 3) + (2x + 2y)i$$

تخيلي حقيقي

$$xy - 3 = 0 \Rightarrow [xy = 3] \div x$$

$$y = \frac{3}{x} \dots\dots (1)$$

$$[2x + 2y = 8] \div 2 \quad \text{تخيلي} = \text{تخيلي}$$

نعوض (1) في (2)

$$x + y = 4 \dots\dots (2)$$

$$\left[x + \frac{3}{x} = 4\right] \cdot x$$

$$x^2 + 3 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\text{أما } x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$\text{أو } x-3=0 \Rightarrow x=3$$

نعوض x في معادلة (2) لبسط y

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{عندما } x=1$$

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{عندما } x=3$$

x	y
1	3
3	1



موقع طلاب العراق

WWW.IC-RES.COM

$x, y \in \mathbb{R}$ جد قيم

مثال 6

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i}\right)y = \frac{1}{i}$$

مُرافق مُرافق مُرافق

$$\left(\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{1-i}\right)y = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}$$

$$\left(\frac{2-2i-i-1}{(1)^2+(1)^2}\right)x + \left(\frac{6-3i-2i-1}{(2)^2+(1)^2}\right)y = \frac{-i}{0+1}$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x + \left(\frac{5-5i}{5}\right)y = 0-i$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)x + (1-i)y = 0-i$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xi + y - yi = 0-i$$

$$\left[\frac{1}{2}x + y = 0\right] \cdot 2 \Rightarrow x + 2y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\left[\frac{-3}{2}x - y = -1\right] \cdot 2 \Rightarrow -3x - 2y = -2 \quad \dots\dots\dots (2) \quad \text{جعل المعادلتين انياً}$$

$$x + \cancel{2y} = 0$$

$$-3x - \cancel{2y} = -2$$

بالجمع

$$[-2x = -2] \div -2 \Rightarrow x = 1$$

نعرض في (1)

$$x + 2y = 0$$

$$1 + 2y = 0 \Rightarrow [2y = -1] \div 2 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$$

$$x - yi = (-2 + 3i)(1 + 5i)$$

$$x - yi = -2 - 10i + 3i - 15$$

$$x - yi = -17 - 7i$$

$$x = -17, -y = -7 \Rightarrow y = 7$$

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$ إذا علمت

$$\frac{3+i}{2-i}, \frac{6}{x+yi} \text{ مترافقان}$$

$$\frac{6}{x+yi} = \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} \right)$$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{6-3i-2i-1}{(2)^2 + (1)^2}$$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{5-5i}{5} \Rightarrow \frac{6}{x+yi} = \frac{5}{5} - \frac{5}{5}i$$

$$\frac{6}{x+yi} = 1-i \Rightarrow x+yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$x+yi = \frac{6+6i}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$x+yi = \frac{6+6i}{2}$$

$$x+yi = 3+3i$$

$$x = 3, y = 3$$

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$

مثال 8

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$$

من التمارين العامة للكتاب

* راجع تحليل مجموع مربعين (x^2+4)

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{(x-2i)(x+2i)}{(x+2i)}$$

$$y = (x-2i)(1+i)$$

$$y+0i = x+xi-2i+2$$

$$y+0i = (x+2) + (x-2)i$$

تخييلي حقيقي

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$y = x+2$$

$$y = 2+2 \Rightarrow y=4$$

إذا كانت $\frac{3-2i}{i}, \frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان

مثال 9

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3+2i}{-i}$$

((راجع الملاحظة خامساً))

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \left(\frac{3+2i}{-i} \cdot \frac{i}{i} \right)$$

((مُرافق))

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3i-2}{-i^2}$$

$$= 1$$

مجموعة من الأسئلة الوزارية حول موضوع إيجاد قيم $x, y \in \mathbb{R}$

سؤال 2

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$ التي تحقق

$$x(x+i) + y(y-i) + i = 13$$

(2000 - د 2)

$$x^2 + xi + y^2 - yi = 13 - i$$

$$(x^2 + y^2) + (x - y)i = 13 - i$$

تخيلي حقيقي

$$x^2 + y^2 = 13 \quad \dots\dots (1)$$

$$x - y = -1 \Rightarrow x = -1 + y \quad \dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1) لينتج

$$(-1 + y)^2 + y^2 = 13$$

$$1 - 2y + y^2 + y^2 - 13 = 0$$

$$[2y^2 - 2y - 12 = 0] \div (2)$$

$$y^2 - y - 6 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(y + 2)(y - 3) = 0$$

$$\text{أما } y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$\text{أو } y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$$

نعوض y في معادلة (1)

$$x = -1 + y$$

$$x = -1 + (-2) \Leftarrow y = -2 \quad \text{عندما}$$

$$x = -3$$

$$x = -1 + 3 \Leftarrow y = 3 \quad \text{عندما}$$

$$x = 2$$

x	y
-3	-2
2	3

سؤال 1

جد قيمتي x, y التي تحقق

$$(2x+i)(y-2i) = -2-9i \quad (1996 - د 1)$$

$$2xy - 4xi + yi + 2 = -2 - 9i$$

$$(2xy + 2) + (-4x + y)i = -2 - 9i$$

$$2xy + 2 = -2 \quad (\text{الحقيقي} = \text{الحقيقي})$$

$$2xy = -2 - 2 \Rightarrow [2xy = -4] \div 2x$$

$$y = \frac{-2}{x} \quad \dots\dots (1)$$

(التخيلي = التخيلي)

$$-4x + y = -9 \quad \dots\dots (2)$$

بتعويض (1) في (2) ينتج

$$[-4x + \left(\frac{-2}{x}\right) = -9] \cdot x$$

$$-4x^2 - 2 = -9x \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$(4x-1)(x-2) = 0$$

$$\text{أما } 4x-1=0 \Rightarrow [4x=1] \div 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{أو } x-2=0 \Rightarrow x=2$$

نعوض x في (1) لإيجاد y

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\frac{1}{4}} = -8, \quad y = \frac{-2}{2} = -1$$

x	y
$\frac{1}{4}$	-8
2	-1

سؤال 3

جد قيمتي $x, y \in \mathbb{R}$ التي تحقق

2009
تمهيدي

$$(3+2i)^2 y = (x+3i)^2$$

$$(9+12i-4)y = x^2 + 6xi - 9$$

$$(5+12i)y = (x^2 - 9) + 6xi$$

$$5y + 12yi = (x^2 - 9) + 6xi$$

$$5y = x^2 - 9 \quad \dots\dots\dots (1) \quad (\text{الحقيقي} = \text{الحقيقي})$$

نعوض

(التخيلي = التخيلي)

$$12y = 6x \Rightarrow x = 2y \quad \dots\dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$5y = (2y)^2 - 9$$

$$5y = 4y^2 - 9 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 9 = 0$$

$$(4y-9)(y+1) = 0$$

أما $4y-9=0 \Rightarrow [4y=9] \div 4 \Rightarrow y = \frac{9}{4}$

أو $y+1=0 \Rightarrow y = -1$

نعوض y في معادلة (2)

$$x = 2y = 2 \left(\frac{9}{4} \right) \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$x = 2y = 2(-1) \Rightarrow x = -2$$

x	y
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
-2	-1

سؤال 4

جد قيمتي x, y الحقيقيتين التي

تحقق: 1998 - د (2)

$$(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$$

$$-2x+2i-x^2i-x = \frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$$

$$-3x+(2-x^2)i = \frac{(3y+7i)(3y-7i)}{(3y+7i)}$$

$$-3x+(2-x^2)i = 3y-7i$$

$$[-3x=3y] \div 3 \Rightarrow y = -x \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$2-x^2 = -7 \Rightarrow 2+7 = x^2$$

$$x^2 = 9 \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \pm 3$$

$$y = -x$$

$$y = -3 \leftarrow x = 3 \quad \text{عندما}$$

$$y = -(-3) \leftarrow x = -3 \quad \text{عندما}$$

$$y = 3$$

سؤال 5

جد قيم $x, y \in \mathbb{R}$ والتي تحقق:

1999 - د (2)

$$(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$$

$$9x^2 + 12xyi - 4y^2 = \frac{200}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = \frac{800 - 600i}{(4)^2 + (3)^2}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = \frac{800}{25} - \frac{600}{25}i$$

جد قيمتي x, y الحقيقيتين التي
تحقق المعادلة:

سؤال 6

2016
تمهيدي

$$\left(\frac{125}{11+2i}\right)x + (1-i)^2 y = 11$$

$$\left(\frac{125}{11+2i} \cdot \frac{11-2i}{11-2i}\right)x + (1-2i)(1+i)y = 11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{(11)^2 + (2)^2}\right)x - 2yi = 11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{125}\right)x - 2yi = 11$$

$$(11-2i)x - 2yi = 11+0i$$

$$11x - 2xi - 2yi = 11+0i$$

$$(11x) + (-2x-2y)i = 11+0i$$

$$[11x=11] \div 11 \Rightarrow x=1$$

(حقيقي - حقيقي)

$$[-2x-2y=0] \div -2$$

(تخيلي - تخيلي)

$$x+y=0$$

$$1+y=0 \Rightarrow y=-1$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = 32 - 24i$$

$$9x^2 - 4y^2 = 32 \quad \dots\dots (1)$$

$$[12xy = -24] \div 12x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad \dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32 \Rightarrow \left[9x^2 - \frac{16}{x^2} = 32\right] \cdot x^2$$

$$9x^4 - 16 = 32x^2 \Rightarrow 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$$

$$(9x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad 9x^2 + 4 = 0 \quad \text{بُهل} \quad \notin \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{أو}} \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

x	y
2	-1
-2	1



موقع طلاب العراق

$$y = 2\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{50}{9} - 1$$

$$y = \frac{41}{9}$$

جد قيم x, y الحقيقيتين التي تحقق:

$$12 + 5i = (x + 3i)(y - 2i)$$

(1) د - 2010

$$12 + 5i = xy - 2xi + 3yi + 6$$

$$xy + 6 = 12 \Rightarrow xy = 12 - 6$$

حقيقي حقيقي

$$\frac{xy}{x} = \frac{6}{x} \Rightarrow y = \frac{6}{x}$$

$$-2x + 3y = 5$$

$$-2x + 3\left(\frac{6}{x}\right) = 5 \Rightarrow \left[-2x + \frac{18}{x} = 5\right] \cdot x$$

$$-2x^2 + 18 = 5x \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0$$

$$(2x + 9)(x - 2) = 0$$

$$\text{أما } 2x + 9 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-9}{2} \Rightarrow x = \frac{-9}{2}$$

$$\text{أو } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y = \frac{6}{x}$$

$$x = -\frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{6}{-\frac{9}{2}} = 6\left(\frac{-2}{9}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

سؤال 7 جد قيمتي $x, y \in \mathbb{R}$ إذا علمت:

(2) د - 2016

$$(x + 2i)(x - i) = \frac{121 + 9y^2}{11 + 3yi}$$

$$x^2 - xi + 2xi + 2 = \frac{121 - 9y^2 i^2}{11 + 3yi}$$

$$(x^2 + 2) + xi = \frac{(11 + 3yi)(11 - 3yi)}{(11 + 3yi)}$$

تخيلي = تخيلي

$$(x^2 + 2) + xi = 11 - 3yi$$

حقيقي = حقيقي

$$x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x^2 = 11 - 2 \Rightarrow x^2 = 9 \text{ بالجزء}$$

$$x = \pm 3$$

$$x = -3y \div -3 \Rightarrow y = \frac{x}{-3} = \frac{\pm 3}{-3}$$

$$y = \pm 1$$

سؤال 8 جد قيمتي $x, y \in \mathbb{R}$ والتي تحقق:

(2) د - 2008

$$y + 5i = (2x + i)(x + i)$$

$$y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi - 1$$

$$y + 5i = (2x^2 - 1) + 3xi$$

$$y = 2x^2 - 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

الجذور التربيعية للعدد المركب

بالتربيع $\sqrt{a+bi} = x+yi$ نفرض

$$a+bi = x^2 + 2xyi - y^2 \Rightarrow a+bi = (x^2 - y^2) + 2xyi \quad ((\text{ثابتة في الحل}))$$

((مربع حدانية))

$$x^2 - y^2 = a \quad \dots\dots (1) \quad \text{حقيقي} - \text{حقيقي} \quad \text{ثم}$$

$$\frac{2xy}{2x} = \frac{b}{2x} \quad \text{تخيلي} - \text{تخيلي}$$

$$y = \frac{b}{2x} \quad \dots\dots (2)$$

اشارة الجزء التخيلي
لعدد السؤال

$$C = \bar{+}(x \circ yi) \quad \leftarrow x, y \quad \text{الجذور هي}$$

النتائج:

$$C = \bar{+}(x \circ yi) \quad \text{قبة} \quad \text{قبة}$$

اشارة الجزء التخيلي من السؤال

جد الجذور التربيعية:

مثال

$$1 \quad 8+6i$$

$$\sqrt{8+6i} = x+yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$8+6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 8 \quad \dots\dots (1)$$

$$[2xy = 6] \div 2x \Rightarrow \frac{2xy}{2x} = \frac{6}{2x}$$

$$y = \frac{3}{x} \quad \dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$x^2 - y^2 = 8$$

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 9 = 8x^2$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad (\text{تجربة})$$

$$(x^2 + 1)(x^2 - 9) = 0$$

$$\text{اما } x^2 + 1 = 0 \text{ يُهمل } \notin \mathbb{R}$$

$$\text{بالجذر } x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$$

$$x = \bar{+} 3$$

$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow y = \frac{3}{\bar{+} 3} = \bar{+} 1$$

$$C = \bar{+}(3+i)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 3+i \\ C_2 &= -3-i \end{aligned} \quad ((\text{الجذور هي}))$$

3 $-i$

$\sqrt{0-i} = x + yi$ بالتربيع

$0-i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$

$[2xy = -1] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-1}{2x} \dots\dots(2)$

$x^2 - y^2 = 0$

$x^2 - \left(\frac{-1}{2x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0\right] \cdot 4x^2$

$4x^4 - 1 = 0$ ((فرق بين مربعين))

$(2x^2 + 1)(2x^2 - 1) = 0$

$2x^2 + 1 = 0$ يُهمل $\notin R$

$2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 1] \div 2$

$x^2 = \frac{1}{2}$ بالجزر $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$C = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ إشارة الجزء التخيلي لعدد السؤال

$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

2 $7+24i$

$\sqrt{7+24i} = x + yi$ بالتربيع

$7+24i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 7 \dots\dots(1)$

$[2xy = 24] \div 2x \Rightarrow y = \frac{12}{x} \dots\dots(2)$

$x^2 - y^2 = 7$

تعويض في معادلة (1)

$x^2 - \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 7 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{144}{x^2} = 7\right] \cdot x^2$

$x^4 - 144 = 7x^2 \Rightarrow x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 - 16) = 0$

$x^2 + 9 = 0$ يُهمل $\notin R$

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16$ بالجزر

$x = \pm 4$

$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{\pm 4} = \pm 3$

$C_1 = \pm (4 + 3i)$

$C_1 = 4 + 3i$, $C_2 = -4 - 3i$

توضيح

$C_1 = + (4 + 3i) = 4 + 3i$ + في حالة

$C_2 = - (4 + 3i) = -4 - 3i$ - في حالة

$8i$

بالتربيع $\sqrt{0+8i} = x + yi$

$0+8i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$

$\left[\frac{2xy}{2x} = \frac{8}{2x}\right] \div 2x \Rightarrow y = \frac{4}{x} \dots\dots(2)$

$x^2 - y^2 = 0$

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$

$x^4 - 16 = 0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

بالجذر $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ أما

$x = \pm 2$

أو $x^2 + 4 = 0$ يُهمل $\notin R$

$y = \frac{4}{x} = \frac{4}{\pm 2} = \pm 2$

$C = \pm(2 + 2i)$

$C_1 = 2 + 2i$

$C_2 = -2 - 2i$

$-6i$

بالتربيع $\sqrt{0-6i} = x + yi$

$0-6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$

$[2xy = -6] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-3}{x} \dots\dots(2)$

$x^2 - y^2 = 0$

$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$

$x^4 - 9 = 0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

بالجذر $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$ أما

$x = \pm \sqrt{3}$

أو $x^2 + 3 = 0$ يُهمل $\notin R$

$y = \frac{-3}{x} = \frac{-3}{\pm \sqrt{3}} = \frac{-\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right)}{\pm \sqrt{3}}$

$y = \pm \sqrt{3}$

$\pm(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)$

$C_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

$C_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

أو $2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 3] \div 2$

$x^2 = \frac{3}{2}$ بالجزر $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

توضيح

$C = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$

$C_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

-25

$x = \sqrt{-25}$

$x = \pm 5i$

-17

$x = \sqrt{17} \cdot \sqrt{-1}$

$x = \pm \sqrt{17}i$



$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

$\frac{4}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4} = 1+\sqrt{3}i$

$\sqrt{1+\sqrt{3}i} = x+yi$ بالتربيع

$1+\sqrt{3}i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 1 \dots\dots(1)$

$[2xy = \sqrt{3}] \div 2x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$

تعويض

$x^2 - y^2 = 1$

$x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = 1$

$\left[x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1\right] \cdot 4x^2$

$4x^4 - 3 = 4x^2$

$4x^4 - 4x^2 - 3 = 0$ (تجربة)

$(2x^2 + 1)(2x^2 - 3) = 0$

$2x^2 + 1 = 0$ $\notin R$ يُهمل

أسئلة الوزارة حول موضوع الجذور التربيعية

$$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4$$

$$\left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4 \right] \cdot 4x^2 \Rightarrow 4x^4 - 9 = 16x^2$$

$$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$$

$$(2x^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$$

$$\underline{\text{L1}} \quad 2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 9] \div 2$$

$x^2 = \frac{9}{2}$ بالجذر

$$x = \mp \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$2x^2 + 1 = 0$ $\notin \mathbb{R}$ يُفصل أو

$$y = \frac{3}{2x} = \frac{\cancel{3}}{(\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}) \mp \frac{3}{\cancel{\sqrt{2}}}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

((إشارة الجزء التخيلى))

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} \right)$$

$$C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

تابعونا على التلي كرام

@iQRES

$c, d \in \mathbb{R} \quad C + di = \frac{7-4i}{2+i}$ إذا كان

سؤال 1

(1) د - 1997

$$\sqrt{2c - di}$$

ملاحظة

عند ما يعطي سؤال فيه علاقة تحتوي مجهول
نقوم بتبسيط العلاقة وبضد منها المجهول .

∴ نجد قيم $c, d \in \mathbb{R}$ من العلاقة أولاً.

$$c + di = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$$

$$c + di = \frac{14 - 7i - 8i - 4}{(2)^2 + (1)^2} = \frac{10 - 15i}{5}$$

$C + di = 2 - 3i$ $C = 2$
 $d = -3$

$$\sqrt{2c-di} = \sqrt{2(2)-(-3)i}$$

$\sqrt{4+3i} = x+yi$ بالتربيع

$$4 + 3i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 4 \dots\dots\dots(1)$$

$$\left[\frac{2xy}{2x} = \frac{3}{2x} \right] \div 2x \Rightarrow y = \frac{3}{2x} \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 4$$

سؤال 3 جد الجذرات التربيعيات للعدد المركب $(-1+7i)(1+i)$ 2010 - د (2)

نضع العدد بصيغة $(a+bi)$

ملاحظة

$$-1-i+7i-7=-8+6i$$

$$\sqrt{-8+6i}=x+yi \text{ بالتربيع}$$

$$-8+6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=-8 \dots\dots(1)$$

$$[2xy=6] \div 2x \Rightarrow y=\frac{3}{x} \dots\dots(2)$$

$$x^2-y^2=-8$$

$$x^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2=-8 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=-8\right] \cdot x^2$$

$$x^4-9=-8x^2 \Rightarrow x^4+8x^2-9=0 \text{ تجربة}$$

$$(x^2+9)(x^2-1)=0$$

$$\underline{\text{أما}} \ x^2+9=0 \text{ يُهمل} \notin \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{أو}} \ x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \text{ بالجزر } x=\pm 1$$

$$y=\frac{3}{x}=\frac{3}{\pm 1}=\pm 3$$

$$C=\mp(1+3i)$$

$$C_1=1+3i$$

$$C_2=-1-3i$$

سؤال 2 جد الجذرات التربيعيات للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$ 2004 - د (2)

يجب وضع العدد بصيغة $(a+bi)$

ملاحظة

$$\frac{14+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{14-14i+2i+2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$\frac{16-12i}{2}=8-6i$$

$$\sqrt{8-6i}=x+yi \text{ بالتربيع}$$

$$8-6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=8 \dots\dots(1) \ , \ 2xy=-6 \div 2x$$

$$y=\frac{-3}{x} \dots\dots(2)$$

$$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=8$$

$$\left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4-9=8x^2$$

$$x^4-8x^2-9=0$$

$$(x^2-9)(x^2+1)=0$$

$$\underline{\text{أما}} \ x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \text{ بالجزر } x=\pm 3$$

$$\underline{\text{أو}} \ x^2+1=0 \Rightarrow \text{ يُهمل} \notin \mathbb{R}$$

$$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{\pm 3}=\pm 1$$

$$C=\mp(3-i)$$

$$C_1=3-i$$

$$C_2=-3+i$$

تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذرها

عندما يطلب معادلة تربيعية ويعطي جذري المعادلة:

1 يجب وضع الجذرين بصورة $a+bi$

2 نجد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين.

3 نطبق العلاقة التالية:

((صيغة قياسية)) $x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

* عندما يقول في السؤال ان المعادلة ذات معاملات حقيقية هذا يعني ان الجذرات مترافقان.

WWW.ID-RES.COM

كۆن المعادلة التربيعية التي

مثال 3

جذرها $m = \frac{3-i}{1+i}$, $L = (3-2i)^2$

* يجب تبسيط الجذور أولاً

$$m = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i-1}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$m = \frac{2-4i}{2} \Rightarrow m = 1-2i$$

$$L = (3-2i)^2 = 9-12i-4$$

$$L = 5-12i$$

مجموع الجذرين $m+L = (1-2i) + (5-12i)$

$$= 6-14i$$

$$m \cdot L = (1-2i)(5-12i)$$

$$= 5-12i-10i-24 = -19-22i$$

$$x^2 - (6-14i)x + (-19-22i) = 0$$

كۆن المعادلة التربيعية التي

مثال 1

جذرها m, L حيث $m = 1-i$, $L = 1+2i$

$$m+L = (1-i) + (1+2i)$$

$$\text{مجموع الجذرين} = 2+i$$

$$m \cdot L = (1-i)(1+2i)$$

$$\text{ضرب الجذرين} = 1+2i-i+2$$

$$= 3+i$$

$$x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$$

كۆن المعادلة التربيعية التي

مثال 2

جذرها $\bar{z} (2+2i)$

$$m = 2+2i, L = -2-2i$$

$$m+L = (2+2i) + (-2-2i) = 0$$

$$m \cdot L = (2+2i)(-2-2i)$$

$$= -4-4i-4i-4 = -8i$$

$$x^2 - (0)x + (-8i) = 0$$

$$x^2 - 8i = 0$$

مثال 4

كّون المعادلة التربيعية ذات
العاملات الحقيقية والتي احد
جذورها $\frac{\sqrt{3}+3i}{4}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i, \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$$

$$m + L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m \cdot L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{4} = 0$$

مثال 1

كّون المعادلة التربيعية ذات
العاملات الحقيقية والتي احد
جذورها i .

((العاملات حقيقية أي ان
الجزران مترافقان)).

$$m + L = (i) + (-i) = 0$$

$$m \cdot L = (i)(-i) = -i^2 = 1$$

$$x^2 - (0)x + 1 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

مثال 2

كّون المعادلة التربيعية ذات
العاملات الحقيقية والتي احد
جذورها $(3-4i)$.

((مترافقان)) $m = 3-4i, L = 3+4i$

$$m + L = (3-4i) + (3+4i) = 6$$

$$m \cdot L = (3-4i)(3+4i) = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

مثال 3

كّون المعادلة التربيعية ذات
العاملات الحقيقية والتي احد
جذورها $(5-i)$.

$$m + L = (5-i) + (5+i) = 10$$

$$m \cdot L = (5-i)(5+i) = (5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 26$$

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$



أسئلة مختلفة ذات صلة

إذا كان $(2+4i)$ هو أحد جذري

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

معاملاتها حقيقية، جد $b, c \in \mathbb{R}$

(2015 - د 2)

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

$$[2x^2 - x(1+b) + (c-6) = 0] \div 2$$

← عامل مشترك

$$x^2 - x\left(\frac{1+b}{2}\right) + \left(\frac{c-6}{2}\right) = 0$$

حاصل ضرب الجذور

الجذور مترافقات لأن المعاملات حقيقية

$$(2-4i) + (2+4i) = \frac{1+b}{2}$$

مجموع الجذور

$$4 = \frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b = 8$$

$$b = 8 - 1$$

$$b = 7$$

$$(2-4i)(2+4i) = \frac{c-6}{2}$$

حاصل ضرب الجذور

$$(2)^2 + (4)^2 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow 4+16 = \frac{c-6}{2}$$

$$20 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow c-6 = 40$$

$$c = 40 + 6$$

$$c = 46$$

* إذا أعطى في السؤال معادلة تربيعية تحويل مجاهيل نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نضع المعادلة بالشكل القياسي حيث الطرف الأيمن = 0 ثم نجعلها بالصيغة التالية:

$$x^2 - (\text{مجموع الجذور})x + (\text{حاصل ضرب الجذور}) = 0$$

ثانياً: إذا وجد أكثر من حد فيه x نسحب الـ x عامل مشترك ويسحب بإشارة سالبة لأن الشكل القياسي فيه معامل x سالب

ثالثاً: نقسم على معامل x^2 دائماً لجعله = 1

رابعاً: نحدد مجموع الجذور وحاصل ضرب الجذور.

خامساً: إذا كان في المعادلة مجهول واحد فقط نحاول البدء بالجزء المعلوم كلياً .
(حاصل الضرب أو حاصل الجمع)
كما في السؤال (2)





أحد الجذرين ثلاثة أمثال الآخر $m = 3L$

$$m + L = (4 - 12i)$$

$$3L + L = 4 - 12i$$

$$[4L = 4 - 12i] \div 4 \Rightarrow L = 1 - 3i$$

$$m = 3(1 - 3i)$$

$$m = 3 - 9i$$

لأن k يمثل حاصل ضرب الجذرين $K = m \cdot L \Rightarrow$

$$K = (3 - 9i)(1 - 3i)$$

$$K = 3 - 9i - 9i - 27$$

$$K = -24 - 18i$$

سؤال 2 إذا كان $(3 + i)$ هو أحد جذري

المعادلة $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$ فما قيمة

$a \in \mathbb{C}$ وما قيمة الجذر الآخر؟ (الكتاب)

نبدأ بالجزء الكامل وهو حاصل ضرب الجذرين

$$m \cdot L = 5 + 5i \Rightarrow (3 + i)(L) = 5 + 5i$$

$$L = \frac{5 + 5i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{15 - 5i + 15i + 5}{9 + 1}$$

$$L = \frac{20 + 10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$$

$$L = 2 + i$$

الآن نجد قيمة a وهي تمثل مجموع الجذرين

$$a = m + L$$

$$a = (3 + i) + (2 + i)$$

$$a = 5 + 2i$$

سؤال 3 إذا كان أحد جذري المعادلة

$x^2 + K = 4x - 12ix$ هو ثلاث أمثال الآخر جد

الجذرات وما قيمة K ؟

$$x^2 + K = 4x - 12ix$$

$$x^2 - 4x + 12ix + K = 0$$

$$x^2 - x(4 - 12i) + K = 0$$

مجموع الجذرين

سؤال 4 إذا كان $(2 + i)$ يمثل أحد جذري

المعادلة $x^2 - 4ix + a = 0$ جد الجذر

الآخر. ثم جد قيمة a .

$$x^2 - 4ix + a = 0 \Rightarrow x^2 - (4i)x + a = 0$$

مجموع الجذرين

$$m + L = +4i$$

$$2 + i + L = 4i \Rightarrow L = -2 + 4i - i$$

$$L = -2 + 3i \text{ الجذر الآخر}$$

حاصل ضرب الجذرين $a =$

$$a = m \cdot L$$

$$a = (2 + i)(-2 + 3i)$$

$$a = -4 + 6i - 2i - 3$$

$$a = -7 + 4i$$



حل المعادلة التربيعية في \mathbb{C}

* يتم حل المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام قانون الدستور.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث: x^2 معامل a

x معامل b

$c =$ الحد المطلق ((بدون x))

مثال 2 جد مجموعة حل المعادلة:

$$2Z^2 - 5Z + 13 = 0$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 2$$

$$b = -5$$

$$c = 13$$

$$Z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$Z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$Z = \frac{5 \pm \sqrt{-79}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{79}i}{4}$$

أما $Z = \frac{5 + \sqrt{79}i}{4}$

أو $Z = \frac{5 - \sqrt{79}i}{4}$

مثال 1 جد مجموعة حل المعادلة الآتية في

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1$$

$$b = 4$$

$$c = 5$$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

أما $x = \frac{-4 + 2i}{2} \Rightarrow x = -2 + i$

أو $x = \frac{-4 - 2i}{2} \Rightarrow x = -2 - i$



مثال 3

حل المعادلة في \mathbb{C}

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = 2i$$

$$c = 3$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{2i \pm \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \pm 4i}{2}$$

$$\text{أما } Z = \frac{2i + 4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

$$\text{أو } Z = \frac{2i - 4i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

* إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ يحوي (i) نأخذ الجذر ونجده بطريقة الفرضية أما إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ فقط عدد سالب لا نستخدم الفرضية.

مثال (3) ومثال (1) و (2) كان بدون i فقط عدد سالب لا يوجد فرضية.

أنظر مثال (4) الجذر فيه (i) بالداخل نستخدم الفرضية.

مثال 4

جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 3 + i$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(3+i)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2}$$

$$\sqrt{-3 - 4i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$-3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad \dots\dots(1)$$

$$[2xy = -4] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = -3 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$$

$$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2$$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{أما } x^2 + 4 = 0 \text{ يُهمل } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\pm 1} = \pm 2 \Rightarrow \pm(1 - 2i)$$

$$Z = \frac{3 \pm (1 - 2i)}{2} \begin{cases} Z = \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i \\ Z = \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = 1 + i \end{cases}$$



مثال 5 جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2 + 2Z + i(2-i) = 0$$

$$Z^2 + 2Z + 2i - i^2 = 0$$

$$a = 1$$

$$Z^2 + 2Z + (1+2i) = 0$$

$$b = 2$$

$$c = 1+2i$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)[1+2i]}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4-8i}}{2}$$

$$Z = \frac{-2 \pm \sqrt{-8i}}{2}$$

((نجد $\sqrt{-8i}$ كما فعلنا سابقاً)) لأن في الجذر i

$$\sqrt{0-8i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$0-8i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$[2xy = -8] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-4}{x} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 16 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{أما } x^2 + 4 = 0 \text{ يُهمل } \notin \mathbb{R}$$

$$\text{أو } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \pm 2$$

$$y = \frac{-4}{x} = \frac{-4}{\pm 2} = \pm 2$$

$$\sqrt{-8i} = \pm(2-2i)$$

$$Z = \frac{-2 \pm (2-2i)}{2}$$

$$\text{أما } Z = \frac{-\cancel{2} + \cancel{2} - 2i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\text{أو } Z = \frac{-2 - 2 + 2i}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$$

هنا نعوض

إذا أعطى المعادلة بطريقة مجموع مربعين نحلل كما تعلمنا طريقة تحليل مجموع مربعين.

ملاحظة

حل المعادلة $Z^2 = -12$

مثال

بالجذر $Z^2 = -12$

$$Z^2 = -12$$

$$Z = \sqrt{-12}$$

$$Z = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$$

$$Z = \sqrt{12}i \Rightarrow Z = \pm 2\sqrt{3}i$$

حل المعادلة $4Z^2 + 25 = 0$

مثال

نضرب $(-i^2)$

$$4Z^2 - 25i^2 = 0$$

$$(2Z - 5i)(2Z + 5i) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad 2Z + 5i = 0 \Rightarrow [2Z = -5i] \div 2$$

$$Z = \frac{-5}{2}i$$

$$\underline{\text{أو}} \quad 2Z - 5i = 0 \Rightarrow [2Z = 5i] \div 2$$

$$Z = \frac{5}{2}i$$



موقع طلاب العراق



WWW.IQ-RES.COM

@IQRES

فتاتنا على التلي كرام

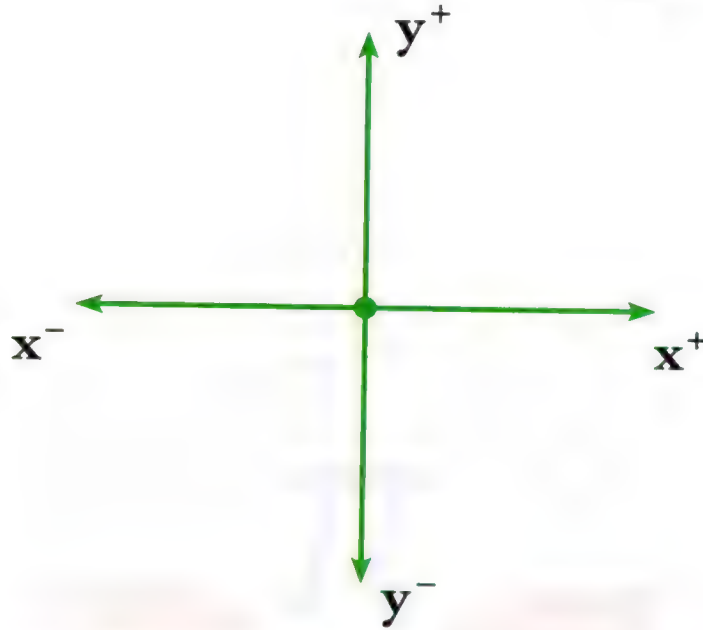
موقع طلاب العراق



التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

العدد المركب $a + bi$ يمكن كتابته بشكل زوج مرتب $P(a, b)$

*مراجعة المستوي الاحداثي:

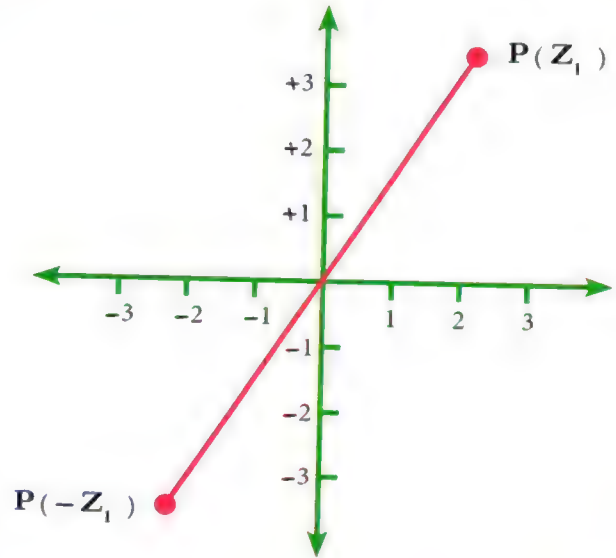


مثال 1 أكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد التالية ثم مثل هذه الأعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند:

1 $Z_1 = 2 + 3i \rightarrow (2, 3)$

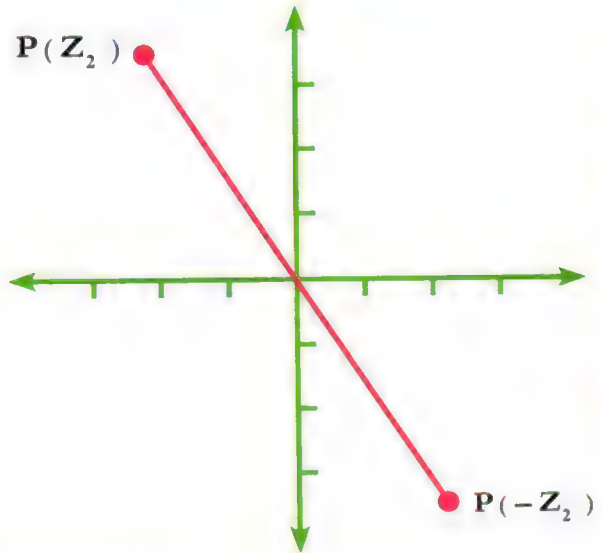
$-Z_1 = -2 - 3i \rightarrow (-2, -3)$

* ((النظير نقلب اشارة العدد كله))



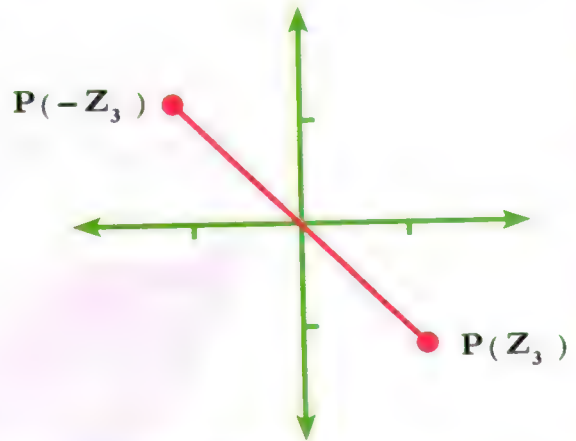
2 $Z_2 = -1 + 3i \rightarrow (-1, 3)$

$-Z_2 = +1 - 3i \rightarrow (1, -3)$



3 $Z_3 = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

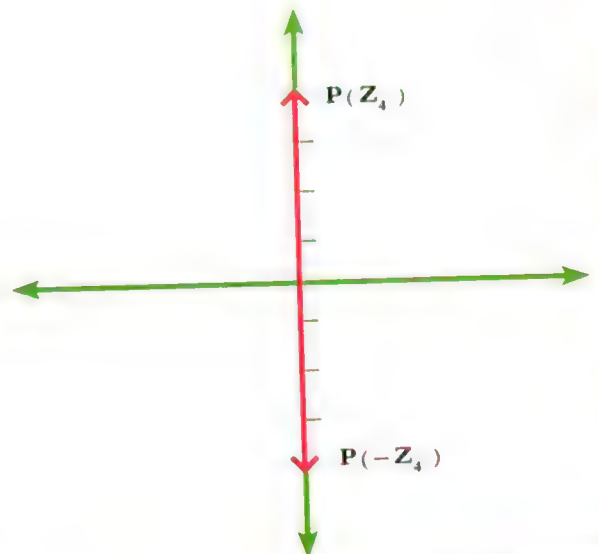
$-Z_3 = -1 + i \rightarrow (-1, 1)$



4 $Z_4 = 4i$

$Z_4 = 0 - 4i \rightarrow (0, -1)$

$-Z_4 = 0 - 4i \rightarrow (0, -4)$



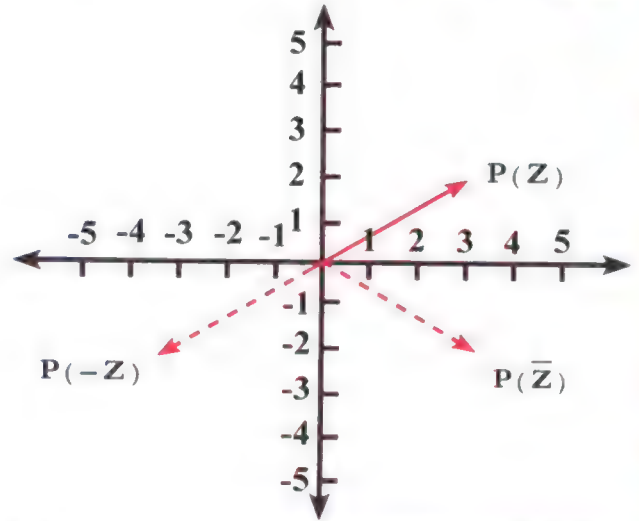
مثال 2 إذا كان $(Z = 4 + 2i)$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من:

$Z, \bar{Z}, -Z$

$Z = 4 + 2i \rightarrow (4, 2)$

$\bar{Z} = 4 - 2i \rightarrow (4, -2)$

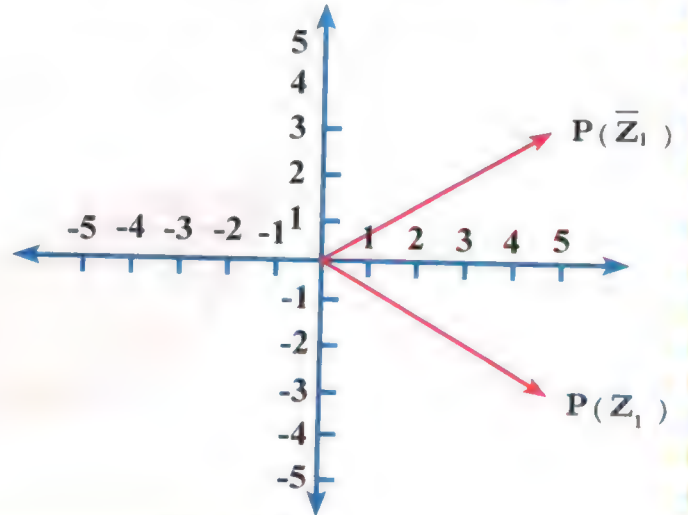
$-Z = -4 - 2i \rightarrow (-4, -2)$



مثال 3 اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثلها على شكل ارجاند:

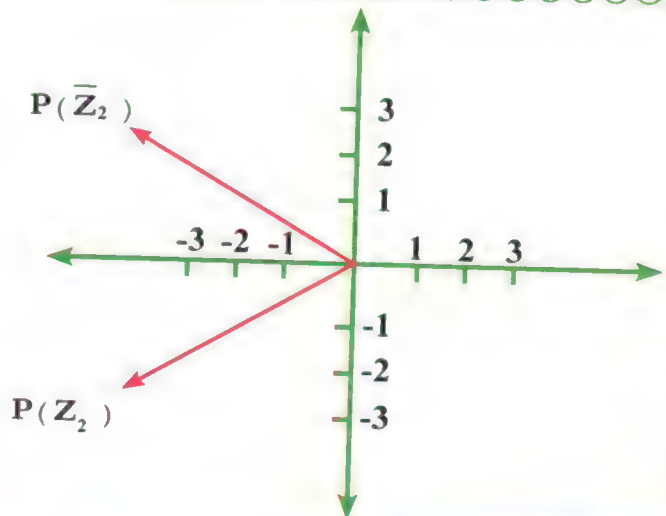
1 $Z_1 = 5 + 3i \rightarrow (5, 3)$

$\bar{Z}_1 = 5 - 3i \rightarrow (5, -3)$



2 $Z_2 = -3 + 2i \rightarrow (-3, 2)$

$\bar{Z}_2 = -3 - 2i \rightarrow (-3, -2)$



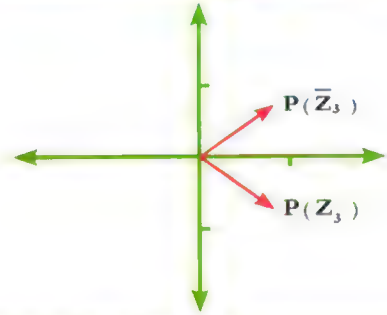
زوروا موقعنا للمزيد

WWW.IQ-RES.COM



2 $Z_3 = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

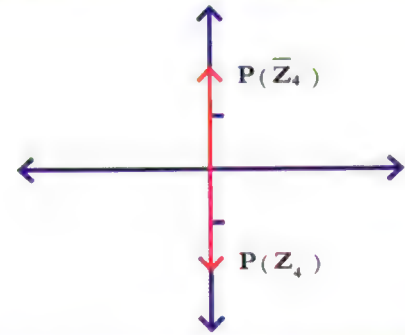
$\bar{Z}_3 = 1 + i \rightarrow (1, 1)$



3 $Z_4 = -2i$

$Z_4 = 0 - 2i \rightarrow (0, -2)$

$\bar{Z}_4 = 0 + 2i \rightarrow (0, 2)$



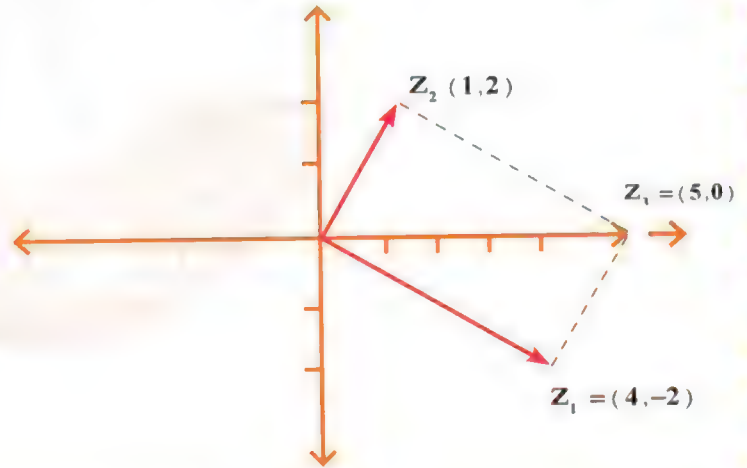
مثال 4 إذا كانت $Z_1 = 4 - 2i$ و $Z_2 = 1 + 2i$ مثل على شكل ارجاند $Z_1 + Z_2$.

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (4 - 2i) + (1 + 2i) \\ &= (4 + 1) + (-2 + 2i) \\ &= 5 + 0i \end{aligned}$$

$Z_1 = 4 - 2i \rightarrow (4, -2)$

$Z_2 = 1 + 2i \rightarrow (1, 2)$

$Z_3 = 5 + 0i \rightarrow (5, 0)$



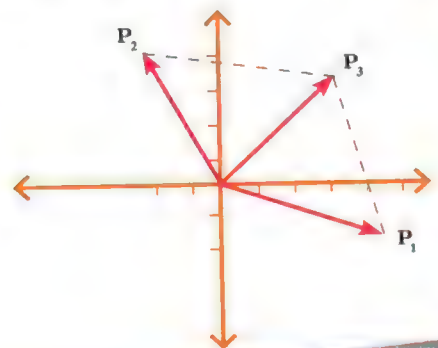
مثال 5 إذا كانت $Z_1 = 6 - 2i$ و $Z_2 = 2 - 5i$ مثل على شكل ارجاند $Z_1 - Z_2$.

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= (6 - 2i) - (2 - 5i) \\ &= (6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i \end{aligned}$$

$P_1(Z_1) = P_1(6, -2)$

$P_2(Z_2) = P_2(-2, 5)$

$P_3(Z_3) = P_3(4, 3)$



مراجعة

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$
0°	0	1
$2\pi = 360^\circ$	0	1
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	1	0
$\pi = 180^\circ$	0	-1

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	-1	0
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

ايجاد قيم $(\cos \theta - \sin \theta)$ لبعض الزوايا

اولاً: $n\pi$ ← n فردي نعتبر الزاوية π
 n زوجي نعتبر الزاوية صفر

$$\sin 20\pi = \sin 0 = 0$$

$$\cos 22\pi = \cos 0 = 1$$

$$\sin 10\pi = \sin 0 = 0$$

$$\cos 13\pi = \cos \pi = -1$$

$$\cos 15\pi = \cos \pi = -1$$

$$\sin 55\pi = \sin \pi = 0$$

((n عدد زوجي اعتبرنا الزاوية صفر))

((n فردي اعتبرنا الزاوية π))

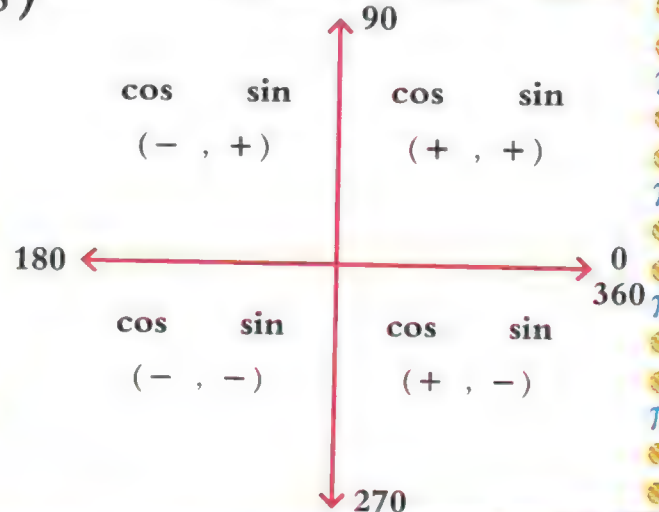
ثانياً: الزوايا التابعة للزوايا الخاصة $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$:

مثلاً: $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$... الخ.

(1) نهمل العدد في البسط وتأخذ الزاوية الخاصة

فقط $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$ ونجد $\frac{\sin}{\cos}$

(2) نضرب العدد \times الزاوية ونحدد الربع ونضع الاشارات.



جد: $\cos \frac{5\pi}{6}$

مثال

نهمل الـ (5) ونجد $\cos \frac{\pi}{6}$ وهو $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ من الجدول

الآن نضرب $150 = 5 \times 30$ وهي في الربع الثاني الـ \cos سالب $\leftarrow \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

\downarrow
 $\frac{\pi}{6}$

جد: $\sin \frac{7\pi}{4}$

مثال

نهمل الـ (7) ونجد $\frac{\pi}{4}$ وهو $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ من الجدول.

الآن نضرب $315 = 7 \times 45$ وهي في الربع الرابع الـ \sin سالب $\leftarrow \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

\downarrow
 $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ثالثاً: إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام نقسم البسط على المقام ويجب ان يكون الناتج زوجي وسوف اوضح الطريقة في المثال.

3 $\sin \frac{47\pi}{4}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 4 \overline{) 47} \\ \underline{4} \\ 07 \\ \underline{4} \\ 3 \end{array}$$

لأن الناتج فردي نعيد القسمة ونجعل الناتج زوجي (دائماً)

$\sin \frac{47\pi}{4}$

\downarrow

$\sin \frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ (نفس الطريقة أعلاه)

12 \leftarrow ناتج زوجي (o.k)

2 $\cos \frac{49\pi}{4}$

\downarrow

$\cos \frac{1\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

\downarrow
نضع الباقي في البسط

6 \leftarrow زوجي o.k

2 $\sin \frac{37\pi}{6}$

\downarrow

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

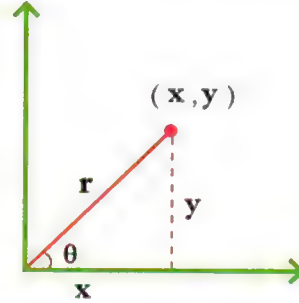


المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب

أولاً: إذا طلب المقياس والسعة للعدد المركب $Z = x + yi$

$$Z = (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots\dots (1)$$



يرمز للمقياس بالرمز r أو $\|Z\|$ ويُقرأ $\text{Mod}(Z)$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \dots\dots (2)$$

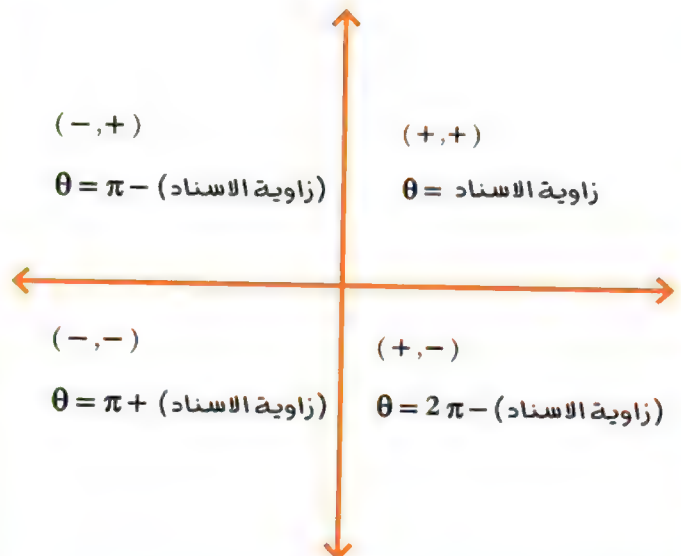
$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \dots\dots (3)$$

نجد زاوية الاسناد من
قيم $\sin \theta$ أو $\cos \theta$
(ونحدد الربع))

ويرمز للسعة بالرمز θ
وتكتب $\arg(Z)$ أو θ

* يجب وضع العدد المركب بصيغة
 $a + bi$ أي الصيغة العددية للعدد
المركب ثم نبدأ بتطبيق القوانين اعلاه
(1) و (2) و (3).

x ← يمثل الجزء الحقيقي مع الإشارة
 y ← يمثل الجزء التخيلي ويُعوض
بدون i انتبه الى ذلك جيداً.



مثال 3 إذا كان $Z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الأساسية لسعة Z .

$$Z = -1 - i \rightarrow Z = \left(\begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right) \text{ الربع الثالث}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1}$$

$$r = \sqrt{2} \text{ (المقياس)}$$

$$\left[\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right] \text{ زاوية الأسناد هي } \frac{\pi}{4} \text{ في الربع الثالث}$$

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ السعة}$$

مثال 1 إذا كان $Z = 1 + \sqrt{3}i$ فجد المقياس والقيمة الأساسية لسعة Z .

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow Z = \left(\begin{matrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{matrix} \right) \text{ الربع الأول}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$\therefore r = 2 \text{ (المقياس)}$$

$$\left[\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right] \text{ زاوية الأسناد هي } \frac{\pi}{3} \text{ في الربع الأول}$$

$$\theta = \text{زاوية الأسناد} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ السعة}$$

مثال 2 جد مقياس وسعة العدد المركب

$$-2 + 2i$$

$$-2 + 2i \Rightarrow \left(\begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix} \right) \text{ الربع الثاني}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \text{ (المقياس)}$$

$$\left[\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right] \text{ زاوية الأسناد هي } \frac{\pi}{4} \text{ في الربع الثاني}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ السعة}$$

قانون الربع الثاني



موقع طلاب العراق

WWW.IQ-HES.COM



ثانياً: إذا أعطى المقياس والقيمة الأساسية للسعة ويطلب العدد المركب:

* إذا لم يعطى زاوية خاصة فراجع طريقة إيجاد قيم $\cos \theta$ و $\sin \theta$ الواردة في (صفحة 53).

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$Z = x + yi$$

$$Z = \text{الجزء الحقيقي} + \text{الجزء التخيلي} (i)$$

مثال 2 إذا كان مقياس عدد مركب 4 والقيمة الأساسية لسعته $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$$r = 4, \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 4 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$x = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \quad \text{الجزء الحقيقي}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 4 \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$y = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -2 \quad \text{الجزء التخيلي}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z = \text{الجزء الحقيقي} + \text{الجزء التخيلي} (i)$$

$$Z = 2\sqrt{3} - 2i$$

مثال 1 عدد مركب مقياسه $(2\sqrt{2})$ والقيمة الأساسية للسعة $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$$r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = -2 \quad \text{الجزء الحقيقي}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 2 \quad \text{الجزء التخيلي}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z = \text{الجزء الحقيقي} + \text{الجزء التخيلي} (i)$$

$$Z = -2 + 2i$$

فكرة إثرائية: يمكن ربط هذه الحالة مع موضوع تكوين المعادلة التربيعية وكما في الأمثلة

الآتية:



مثال 2

إذا علمت أن $Z = -1 + hi$ عدد مركب القيمة الاساسية لسعته $\frac{3\pi}{4}$ جد قيمة (h) ثم كون المعادلة التربيعية التي جذورها الأول Z والثاني ضعف الأول.

$$(-1, h) \Rightarrow x = -1, y = h$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos \theta} = \frac{-1}{\cos \frac{\pi}{4}}$$

$$r = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 1, h = 1$$

$$Z_1 = -1 + i \quad \text{الجذر الأول}$$

$$Z_2 = 2Z_1 \quad \text{الجذر الثاني ضعف الأول}$$

$$Z_2 = -2 + 2i$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع الجذرين} &= (-1 + i) + (-2 + 2i) \\ &= -3 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل ضرب الجذرين} &= (-1 + i)(-2 + 2i) \\ &= 2 - 2i - 2i - 2 \\ &= -4i \end{aligned}$$

$$x^2 - (-3 + 3i)x + (-4i) = 0$$

مثال 1

كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذورها مقياسه (2) وسعته الاساسية $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

ملاحظة

يجب أن نجد العدد المركب وهو أحد جذور المعادلة أما الجذر الآخر فهو مرافقة لأن المعادلة ذات معاملات حقيقية.

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x = 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 1$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$y = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{الجذر الآخر}$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع الجذرين} &= (1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل ضرب الجذرين} &= (1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) \\ &= (1)^2 + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

الصيغة القطبية: هناك صيغة أخرى للعدد المركب وهي الصيغة القطبية والتي تكتب بالشكل:

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

السعة θ ، القياس r

مثال 2
ضع العدد $2\sqrt{3} - 2i$ بالصيغة القطبية.

$$2\sqrt{3} - 2i \rightarrow (2\sqrt{3}, -2) \quad ((\text{الربع الرابع}))$$

(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

زاوية الأسناد

$$\frac{\pi}{6}$$

ربع رابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow[\text{مقام}]{\text{توحيد}} \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 4\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$$

مثال 1
غير عن العدد المركب $-2 + 2i$ بالصيغة القطبية.

$$-2 + 2i \rightarrow (-2, 2) \quad ((\text{الربع الثاني}))$$

(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$$

$$r = 2\sqrt{2} \quad (\text{القياس})$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد

$$\frac{\pi}{4}$$

الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[\text{مقام}]{\text{توحيد}} \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

مبرهنة دي موافر

أولاً: إذا كان لدينا $(a + bi)^n$ حيث n عدد صحيح (ليس كسراً).

$$Z^n = r^n [\cos \theta + i \sin \theta]^n \Rightarrow Z^n = r^n [\cos(\theta \cdot n) + i \sin(\theta \cdot n)]$$

ملاحظة

إذا كان n عدد صحيح سالب تصبح العلاقة:

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$Z^{-n} = r^{-n} [\cos(\theta \cdot n) - i \sin(\theta \cdot n)]$$

أي أن السالب الذي مع الزاوية يُهمل مع دالة \cos ويتم وضعه قبل دالة \sin

ملاحظة

لحل سؤال دي موافر وكان الأس عدد صحيح يجب توفير ثلاث أركان وهي القياس، θ السعة، n وهو الأس القوس وقد تعلمت سابقاً كيف تجد θ و r . ثم تطبق قانون مبرهنة دي موافر أعلاه.

الجزء الأول من الموضوع: يعطي صيغة قطبية جاهزة ما عليك سوى ضرب (الأس \times الزاوية) كما في الأمثلة التالية:

أحسب:

مثال 1

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left[\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right]^4 \\ &= \cos \left(\frac{3\pi}{8} \cdot 4 \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{8} \cdot 4 \right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \\ &= 0 + i(-1) \Rightarrow 0 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \left[\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right]^4 \\ &= \cos \left(\frac{5\pi}{24} \cdot 4 \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{24} \cdot 4 \right) \\ &= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \\ &= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left[\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right]^{-3} \\ &= \cos \left(\frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) \\ &= \cos \frac{-7\pi}{4} + i \sin \left(\frac{-7\pi}{4} \right) \\ &\text{انتبه! السالب يهمل مع } \cos \text{ ويتم وضعه قبل الـ } \sin \\ &\text{السالب قبل الـ } \sin \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

مثال 2

بسط ما يلي:

$$1 \frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3}$$

* لا يمكن ان نطرح الاسس ((عند القسمة تطرح الاسس)) لأن الاقواس مختلفة. لذلك سوف نضرب العدد الذي بجانب θ بأس القوس ((عكس العملية بالضبط)).

$$\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^9} = (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$2 \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^8 (\cos \theta - i \sin \theta)^4$$

$$\cos \theta - i \sin \theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^{-1}$$

"توضيح"

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^8 (\cos \theta + i \sin \theta)^{-4}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

حل آخر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 [(\cos \theta + i \sin \theta)^4 (\cos \theta - i \sin \theta)^2]$$

متراافقات

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta]^4$$

$$1 = (\text{تخيلي})^2 + (\text{حقيقي})^2$$

$$\cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

مثال 3

أحسب باستخدام دي موافر $(1+i)^{11}$

$$1+i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{x,y} \quad ((\text{الربع الأول}))$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{الركن الأول } (r)$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left[\begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد} \\ \frac{\pi}{4} \end{array} \right]$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left[\begin{array}{l} \text{الربع الأول} \end{array} \right]$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{الركن الثاني}$$

الركن الثالث $n=11$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad \text{قانون دي موافر}$$

$$Z^{11} = (\sqrt{2})^{11} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^{11} \quad \text{تعويض}$$

$$Z^{11} = 32 \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right) \quad \begin{array}{l} \text{ضرب الاس} \\ \text{في الزاوية} \end{array}$$

$$= 32 \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \begin{array}{l} \text{تبسيط الزاوية} \end{array}$$

$$= 32 \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = -32 + 32i \quad \text{الناتج}$$

توضيح:

$$\frac{11\pi}{4} \quad \begin{array}{l} 4 \sqrt{\frac{11}{8}} \rightarrow \frac{3\pi}{4} \\ 3 \end{array}$$

مثال 5 أحسب باستخدام دي موافر $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

$$\sqrt{3}+i \rightarrow \left(\sqrt{3}, 1\right) \quad \text{الربع الأول}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[\begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد} \\ \text{الربع الأول} \end{array} \right] \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^{-9} = (2)^{-9} \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^{-9}$$

$$= \frac{1}{2^9} \left[\cos \frac{-9\pi}{6} + i \sin \frac{-9\pi}{6} \right] \quad \begin{array}{l} \text{يُحْصَل} \\ \text{يُخْرَجُ قَبْلُ \sin} \end{array}$$

$$= \frac{1}{512} \left(\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{تذكر} \quad \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$

$$= \frac{1}{512} (0 - (-1)i)$$

$$= 0 + \frac{1}{512}i$$

مثال 4 أحسب باستخدام دي موافر $(1-i)^7$

$$1-i \rightarrow \left(1, -1\right) \quad \text{الربع الرابع}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{الركن الأول (r)}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \rightarrow r = \sqrt{2}$$

الركن الثاني السعة (θ)

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

الركن الثالث $n=7$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad \text{قانون دي موافر}$$

$$Z^7 = (\sqrt{2})^7 \left[\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right]^7 \quad \text{تعويض}$$

$$Z^7 = 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{49\pi}{4} + i \sin \frac{49\pi}{4} \right) \quad \begin{array}{l} \text{الاس} \\ \text{الزاوية} \end{array}$$

$$= 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \begin{array}{l} \text{تبسيط} \\ \text{الزاوية} \end{array}$$

$$= 8\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \quad \text{الناج}$$

$$= 8 + 8i$$



نتيجة مبرهنة دي موافر

عندما يكون اس القوس كسر وبشكل $(\frac{1}{n})$ أي ان الكسر بسطه $= 1$ يكون السؤال نتيجة دي موافر.

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

* ولحل سؤال النتيجة توفير أربع اركان وهي:

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, مقام الاس n , السعة θ , المقياس r

ملاحظة عندما يطلب (الجزور التربيعية - التكعيبية - الجزور الاربعة ... الخ) لعدد مركب غير مرفوع الى اس يعني نتيجة والاس كسر ولا يعطي قوس في هذه الحالة انت عليك التمييز:

نلاحظ الامثلة التوضيحية

k نقت قبل الـ n برقم كما

معناها $\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{2}} \rightarrow n = 2, k = 0, 1$ جذور تربيعية

معناها $\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{3}} \rightarrow n = 3, k = 0, 1, 2$ جذور تكعيبية

معناها $\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{4}} \rightarrow n = 4, k = 0, 1, 2, 3$ جذور الأربعة

* إذا كان العدد المركب مرفوع الى اس كسر ولكن (البسط $\neq 1$) للأس فيكون السؤال (مبرهنة ونتيجة).

$$\begin{aligned} \text{مثلاً } (a + bi)^{\frac{3}{2}} &= \left[(a + bi)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \begin{cases} (a + bi)^3 \\ \text{(نتيجة المبرهنة)}^{\frac{1}{2}} \end{cases} \\ \text{مثلاً } (a + bi)^{-\frac{5}{2}} &= \left[(a + bi)^{-5} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{cases} (a + bi)^{-5} \\ \text{(النتيجة دي موافر)}^{\frac{1}{2}} \end{cases} \\ \text{مثلاً } (a + bi)^{-\frac{2}{3}} &= \left[(a + bi)^{-2} \right]^{\frac{1}{3}} \begin{cases} (a + bi)^{-2} \text{ مبرهنة} \\ \text{(النتيجة)}^{\frac{1}{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

انتبه!

ضع اشارة السالب مع القوس الداخلي (مع المبرهنة) مهما كان موقع السالب في الأس.

* عند قراءة الملاحظة الاخيرة انظر الى سؤال 2017 دور أول فيه شرح مفصل لهذه الحالة (سؤال 20) في الاسئلة الوزارية.



$$k=1 \quad \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} = \frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{2} = \frac{8\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

جد الجذور التكعيبية للعدد

المركب $27i$ باستخدام نتيجة مبرهنة دي موافر.

$$0 + 27i \rightarrow (0, 27), \quad n=3$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(0)^2 + (27)^2} = \sqrt{27^2} \Rightarrow r = 27$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{27} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{27}{27} = 1$$

هنا لا تطبق قانون الأرباع

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

لأن الزاوية لا تنتهي إلى ربع وتقع على الحدود بين الربعين الأول والثاني.

$$Z_1^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right]$$

$$k=0 \quad \text{عندما} \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = 27^{\frac{1}{3}} \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$Z_1 = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

جد الجذور التربيعية للعدد

المركب $-1 + \sqrt{3}i$ باستخدام نتيجة مبرهنة دي موافر.

$$-1 + \sqrt{3}i \rightarrow (-1, \sqrt{3}), \quad n=2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد

$$\frac{\pi}{3}$$

الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z_1^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \theta + i \sin \theta \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z_1^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$k=0 \quad \frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{2} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z_1 = 2^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

WWW.IQ-RES.COM

الزاوية

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} \Rightarrow \frac{\pi + 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = (16)^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z_1 = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$\frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z_2 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$k = 2 \text{ عندما } \frac{\pi + 4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} i$$

$$k = 3 \text{ عندما } \frac{\pi + 6\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z_4 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} i$$

k = 1

$$\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + \frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$Z_2 = 3 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i$$

$$k = 2 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{9\pi}{6}$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$= 3(0 - i) = -3i$$

جد الجذور الأربعة للعدد (-16).

مثال 3

$$-16 + 0i \rightarrow (x, y) = (-16, 0) \quad n = 4$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-16)^2 + (0)^2} = \sqrt{256}$$

$$r = 16$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-16}{16} = -1$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{16} = 0$$

$$\theta = \pi \quad (\text{تبقى كما هي})$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

لا نطبق قانون الأرباع لأن π تقع على الحدود بين الربعين الثاني والثالث.

زوروا موقعنا للمزيد

WWW.IQ-RES.COM



عندما $k=2$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi+8\pi}{2}}{6} = \frac{11\pi}{12}$$

$$Z_3 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

عندما $k=3$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 6\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi+12\pi}{2}}{6} = \frac{15\pi}{12}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$Z_4 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$Z_4 = 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \Rightarrow Z_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

عندما $k=4$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 8\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$$

$$Z_5 = 2 \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

عندما $k=5$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 10\pi}{6}$$

$$\frac{23\pi}{12}$$

$$Z_6 = 2 \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$$

أوجد قيم $(-64i)^{\frac{1}{6}}$ باستخدام مبرهنة دي موافر.

مثال 4

(x, y)

$$0 - 64i \rightarrow (0, -64), \quad n=6$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{0 + (-64)^2} \Rightarrow r = 64$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{64} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-64}{64} = -1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

عندما $k=0$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 0}{6} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = (64)^{\frac{1}{6}} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

عندما $k=1$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi+4\pi}{2}}{6} = \frac{7\pi}{12}$$

$$Z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$



5 مثال أوجد الصيغة القطبية للبقدار

$(\sqrt{3} + i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له.

(x, y)

الربع الأول $\sqrt{3} + i \rightarrow (\sqrt{3}, 1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{زاوية الأسناد} \quad \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{ربع أول} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^2 = 2^2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2$$

$$Z^2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

الجذور الخمسة $Z^{\frac{1}{5}}$

$$Z^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

عندما $k = 0$

$$\frac{\frac{\pi}{3} + 0}{5} = \frac{\pi}{15}$$

$$Z_1 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)$$

$$\text{عندما } k = 1 \quad \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} = \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} = \frac{7\pi}{15}$$

$$Z_2 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15} \right)$$

$$\text{عندما } k = 2 \quad \frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{5} = \frac{13\pi}{15}$$

$$Z_3 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15} \right)$$

$$\text{عندما } k = 3 \quad \frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{5} = \frac{19\pi}{15}$$

$$Z_4 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right)$$

$$\text{عندما } k = 4 \quad \frac{\frac{\pi}{3} + 8\pi}{5} = \frac{25\pi}{15} = \frac{5\pi}{3}$$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

استخرجنا قيم \sin , \cos لأن الزاوية خاصة



$$Z_2 = (1)^{\frac{1}{3}} (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$Z_2 = -1 + 0i$$

عندما $k = 2$

$$\theta = \frac{\pi + 4\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$Z_3 = (1)^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$Z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

* يمكن ان يكون منطوق السؤال بصيغ مختلفة مثل:

أولاً: باستخدام ديهوافر جد الجذور

التكعيبية للعدد (-1) معناها

$$x^3 = -1 \Rightarrow (-1 + 0i)^{\frac{1}{3}}$$

ثانياً: باستخدام ديهوافر جد الجذور

التكعيبية للعدد $(8i)$ معناها

$$x^3 = 8i \Rightarrow (0 + 8i)^{\frac{1}{3}}$$

لذلك انتبه جيداً لمنطوق السؤال.

حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$

باستخدام مبرهنة ديهوافر.

بالجذر التكعيبية $x^3 = -1$

$$x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = (-1 + 0i)^{\frac{1}{3}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} \Rightarrow r = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned} \right\} \theta = \pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k = 0 \quad \frac{\pi + 0}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z_1 = (1)^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{عندما } k = 1 \quad \frac{\pi + 2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$$



الأسئلة الوزارية حول موضوع المقياس والسعة والصيغة القطبية ومبرهنة ديموافر

سؤال 3 ضح البقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وستعه الأساسية.

(1) - 2001 د

$$Z = \frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{(1)^2+(2\sqrt{3})^2} = \frac{13-13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z = \frac{13}{13} - \frac{13\sqrt{3}i}{13} \Rightarrow Z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z = (1, -\sqrt{3})$$

(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$r = 2 \quad ((\text{المقياس}))$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3} \quad ((\text{السعة}))$$

سؤال 1 إذا كان $Z = (-\sqrt{3}, 1)$ عدداً مركباً أكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الأساسية للسعة.

(2) - 2002 د

$$Z = -\sqrt{3} + i \rightarrow (-\sqrt{3}, 1)$$

(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2 \quad ((\text{المقياس}))$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \quad ((\text{السعة}))$$

سؤال 2 إذا كان $(-1 + \sqrt{3}i)$ عدداً مركباً جد مقياسه والقيمة الأساسية لسعته.

2008
خارج القطر

$$Z = -1 + \sqrt{3}i \rightarrow (-1, \sqrt{3})$$

(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

جد المقياس والقيمة الاساسية

سؤال 6

للسعة للعدد المركب $(1 + \sqrt{3}i)$

2008 - د (1)

يجب وضع العدد المركب بصيغة

انتبه!

$a+bi$ والتخلص من التربيع.

$$Z = 1 + 2\sqrt{3}i - 3 \Rightarrow Z = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$Z = (-2, 2\sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12}$$

$$r = 4 \text{ ((المقياس))}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد / $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

إذا كان $Z = 1 + \sqrt{3}i$ عدداً مركباً

سؤال 7

اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد المقياس والسعة.

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow (1, \sqrt{3})$$

2006 - د (2)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد / $\frac{\pi}{3}$ الربع الأول

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

جد المقياس والقيمة الاساسية

سؤال 4

للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

2007 - د (2)

$$Z = \frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \Rightarrow Z = \frac{2i - 2i^2}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$Z = \frac{2+2i}{2} \Rightarrow Z = 1+i \quad \begin{matrix} (1,1) \\ (x,y) \end{matrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left. \begin{matrix} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\} \theta = \frac{\pi}{4} \quad \begin{matrix} \text{زاوية الأسناد} / \frac{\pi}{4} \text{ الربع الأول} \\ \text{السعة} \end{matrix}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

جد المقياس والقيمة الاساسية

سؤال 5

للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

2008 - د (2)

$$Z = \frac{4}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}$$

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow (1, \sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{matrix} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\} \theta = \frac{\pi}{3} \quad \begin{matrix} \text{زاوية الأسناد} / \frac{\pi}{3} \text{ الربع الأول} \end{matrix}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

سؤال 10 اكتب الصيغة القطبية للعدد

المركب $3 - 3\sqrt{3}i$

(2015 - د 3)

$Z = 3\sqrt{3}i \rightarrow Z = (3, -3\sqrt{3})$
الربع الرابع (x, y)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36}$

$r = 6$

$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ زاوية الأسناد

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ هي $\frac{\pi}{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$Z = 6\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

سؤال 11 جد الصيغة القطبية للعدد

المركب $5 - 5i$

(2014 - د 3)

$Z = 5 - 5i \rightarrow (5, -5)$
الربع الرابع (x, y)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$

$r = 5\sqrt{2}$

سؤال 8 إذا كان عدداً مركباً مقياسه 3

وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي والجبري له.

(2003 - د 2)

$r = 3, \theta = \frac{\pi}{3}$

$x = r \cdot \cos \theta$

$x = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$y = r \cdot \sin \theta$

$y = 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$Z = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), Z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

((الديكارتي))

((الجبري))

سؤال 9 إذا كان عدداً مركباً مقياسه (4)

وسعته $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ جد الشكل الديكارتي والجبري له.

(2006 - د 1)

$r = 4, \theta = \frac{5\pi}{6}$

$x = r \cdot \cos \theta$

$x = 4 \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

$y = r \cdot \sin \theta$

$y = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$Z = (-2\sqrt{3}, 2), Z = -2\sqrt{3} + 2i$

((الديكارتي))

((الجبري))

جد بابلط صورة

سؤال 13

2015 - د (1)
خارج القطر

$$(a) \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)^{-3}$$

$$\left[\cos \left(\frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) \right]$$

$$\cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} i \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$(b) (\cos \theta + i \sin \theta)^8 (\cos \theta - i \sin \theta)^4$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^8 \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)^{-4}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

هل أنت:

سؤال 14

2016 - د (2)
خارج القطر

$$\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = 0$$

$$\frac{[(\cos \theta + i \sin \theta)^2]^5}{[(\cos \theta + i \sin \theta)^4]^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^8} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 - (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$= 0$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

زاوية الأسناد
 $\frac{\pi}{4}$
الربع الرابع

سؤال 12
اكتب العدد $Z = (1 + \sqrt{3}i)^2$ بالصيغة

القطبية.

2016 - د (1)
خارج القطر

$$Z = (1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3$$

$$= -2 + 2\sqrt{3}i \quad \begin{matrix} - & + \\ (-2, 2\sqrt{3}) \\ (x, y) \end{matrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

زاوية الأسناد
 $\frac{\pi}{3}$
الربع الثاني

لوقال باستخدام ديهاوفا لا نفتح

التربيع ونحل ديهاوفا $n=2$

$$k = 2 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = 5 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$Z_3 = 5(0 - i) \Rightarrow Z_3 = -5i$$

سؤال 16 جد الجذور التكعيبية للعدد

المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنة دي موافر.

2015 - د (2)
خارج القطر

$$Z = 1+i \rightarrow Z = (1,1) \quad \text{الربع الأول}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^n = (\sqrt{2})^2 \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$Z^2 = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \cdot 2 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \cdot 2 \right) \right]$$

$$Z^2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

جد الجذور التكعيبية للعدد

سؤال 15

125i باستخدام مبرهنة دي موافر

2015 - د (1)

$$Z = 0 + 125i \quad (0, 125)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(0)^2 + (125)^2} \Rightarrow r = 125$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{0}{125} = 0 \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{125}{125} = 1 \end{aligned} \right\} \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} (\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k = 0 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = 125^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Z_1 = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \Rightarrow Z_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\text{عندما } k = 1 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$Z_2 = 5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \Rightarrow Z_2 = \frac{-5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

سؤال 16 جد الصيغة القطبية للجزور الخمسة

2014 - د (1)

للعدد المركب $(\sqrt{3} + i)^2$

الربع الأول $Z = \sqrt{3} + i \rightarrow Z = (\sqrt{3}, 1)$
(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[\begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد} \\ \text{الربع الأول} \end{array} \right. \quad \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^2 = (2)^2 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^2$$

$$Z^2 = 4 \left(\frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

سيتم تعويض الزوايا مباشرة بشكل مختصر

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, \theta = \frac{\pi}{3}, r = 4, n = 5$$

الجزور الخمسة

$$k = 0 \Rightarrow Z_1 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow Z_2 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15} \right)$$

$$k = 2 \Rightarrow Z_3 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15} \right)$$

$$k = 3 \Rightarrow Z_4 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right)$$

$$k = 4 \Rightarrow Z_5 = \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{25\pi}{15} + i \sin \frac{25\pi}{15} \right)$$

$$= \sqrt[5]{4} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

لانستخرج قيم ال cos
sin لأنه طلب صيغة قطبية.

$$Z^2 = 2(0+i) \Rightarrow Z^2 = 0+2i$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right]$$

الجزور التكعيبية $(Z^2)^{\frac{1}{3}}$

$$(Z^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{عندما } k=0 \quad \frac{\frac{\pi}{2}+0}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\text{عندما } k=1 \quad \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\text{عندما } k=2 \quad \frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$Z_3 = \sqrt[3]{2} (0 - i)$$





سؤال 18

باستخدام مبرهنة دي موافر جد

الجذور التكعيبية للعدد $8i$

(1) د - 2015

نازحين

(1) د - 2016

$$Z = 0 + 8i \rightarrow (0, 8)$$

(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(0)^2 + (8)^2} = \sqrt{0 + 64} \Rightarrow r = 8$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{8} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k = 0, \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = 8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Z_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$Z_1 = (\sqrt{3} + i)$$

$$\text{عندما } k = 1, \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi + 4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$Z_2 = (-\sqrt{3} + i)$$

$$k = 2, \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi + 8\pi}{2}}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2(0 - i)$$

$$Z_3 = -2i$$

سؤال 19 جد مجموعة حل المعادلة في

مجموعة الاعداد المركبة باستخدام مبرهنة دي موافر $x^3 - 8i = 0$

الجذر التربيعي $x^3 - 8i = 0 \Rightarrow x^3 = 8i$

$$x = (8i)^{\frac{1}{3}}$$

نفس الحل في سؤال (18) تماماً.



سؤال 20

باستخدام دي موافر احسب

$$(\sqrt{3} + i)^{-3}$$

الربع الاول $\Rightarrow (\sqrt{3} + i)$

أولاً: القوس كسر والبسط $\neq 1$ لذلك هذا السؤال مبرهنة + نتيجة

$$\left[(\sqrt{3} + i)^{-3} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^{-3} \quad \text{مبرهنة}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} \end{aligned} \right\} \quad \frac{\pi}{6} \quad \text{زاوية الاسناد}$$

$$\theta = \text{زاوية الاسناد} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z^n = r^n [\cos \theta + i \sin \theta]^n$$

$$Z^{-3} = (2)^{-3} \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^{-3}$$

$$Z^{-3} = \frac{1}{(2)^3} \left[\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right]^{-3}$$

$$Z^{-3} = \frac{1}{8} \left[\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right]^{-3}$$

الآن نرفع الناتج للأس $\frac{1}{2}$ وتحل نتيجة

$$(Z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r = 2, \quad k = 0, 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{1}{8}$$

$$k = 0 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$k = 1 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$Z_2 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i$$

العلاقات الفرعية وتبسيط قوى ω

الجزء الثاني

العلاقة الرئيسية

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$1 = -\omega^2 - \omega$$

$$\omega + 1 = -\omega^2$$

$$\omega = -\omega^2 - 1$$

$$\omega^2 + 1 = -\omega$$

$$\omega^2 = -\omega - 1$$

$$\omega^2 + \omega = -1$$

* كل ركنين موجودات في السؤال بنفس الإشارة فناتجها الركن الثالث بعكس الإشارة.

$$\text{مثلاً } \omega^2 + \omega = -1$$

$$\omega + 1 = -\omega^2$$

$$-1 - \omega^2 = \omega$$

$$-\omega^2 - \omega = 1$$

$\omega - 1$ لا توجد علاقة فرعية لان الاشارات مختلفة.

* كل ركنين في السؤال اشارتهما مختلفة فهنا لا توجد علاقة فرعية تربطهم

لا توجد علاقة فرعية $\Rightarrow +\omega^2 - \omega$

تبسيط القوى ω

$$\omega^3 = 1$$

$$\begin{array}{ccc} \text{أس} & \text{ناتج القسمة} & \text{باقي القسمة} \\ \omega & = & (\omega^3) \cdot \omega \\ & \swarrow & \\ & \text{دائماً تساوي واحد} & \end{array}$$

* كل ω مرفوعة الى أس من مضاعفات العدد 3 فناتجها يساوي واحد .

* إذا كان الاس سالب ننزله الى المقام ونبسطه والناتج الاخير يضرب بـ ω^3 للاستفادة من

خاصية عند القسمة تطرح الاسس .

بسط ما يأتي:



استراحة شعرية:

بنفسي مَن اغارَ عليه مِنِّي
وأحسد مقلَّةَ نظراتِ اليه
ولو انِّي قدرتُ لطمستُ عنه
عيونَ الناسِ من حذرِّي عليه

$$\omega^{11} = (\omega^3)^3 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{17} = (\omega^3)^5 \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{18} = (\omega^3)^6 \cdot \omega^0 = 1$$

$$\omega^{100} = (\omega^3)^{33} \cdot \omega^1 = \omega$$

$$\omega^{-11} = \frac{1}{\omega^{11}} = \frac{1}{(\omega^3)^3 \cdot \omega^2} = \frac{1}{\omega^2} (\omega^3) = \omega$$

$$\omega^{-13} = \frac{1}{\omega^{13}} = \frac{1}{(\omega^3)^4 \cdot \omega^1} = \frac{1}{\omega} (\omega^3) = \omega^2$$

$$\omega^{-35} = \frac{1}{\omega^{35}} = \frac{1}{(\omega^3)^{11} \cdot \omega^2} = \frac{1}{\omega^2} (\omega^3) = \omega$$



موقع طلاب العراق

الجزء الثالث

ملاحظات عامة

مثلاً

أولاً: العامل المشترك، يؤدي الى علاقة فرعية.

(1) $3\omega + 3\omega^2$

$= 3(\omega + \omega^2) = 3(-1) = -3$

(2) $5 + 5\omega^2$

$= 5(1 + \omega^2) = 5(-\omega) = -5\omega$

(3) $-3\omega - 3$

$= -3(\omega + 1)$

$= -3(-\omega^2) = 3\omega^2$

انتبه!

عند سحب سالب عامل مشترك فان
سالب ÷ سالب = موجب

ثانياً: وجود ω أو ω^2 وحدها في المقام بدون شيء آخر نضرب الكسر بـ ω^3 وهي تساوي واحد.

مثلاً

(1) $\frac{2}{\omega}(\omega^3) = 2\omega^2$

(2) $\frac{5}{\omega^2}(\omega^3) = 5\omega$

(3) $\frac{-7}{\omega}(\omega^3) = -7\omega^2$

(4) $\frac{\sqrt{2}}{3\omega^2}(\omega^3) = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega$

(5) $\frac{2}{2+\omega} \Rightarrow \omega^3$ لا يمكن الضرب ω^3
لعدم الاستفادة من ذلك

انتبه!

عند وجود رقم معامل جنب $\omega^2 > \omega$ فهنا لا يؤثر
لانه ثابت أما إذا كان بينهم + ، - فهنا يؤثر

رقم $\omega \pm$

رقم $\omega^2 \pm$

لا نضرب الكسر بـ ω

أنظر

أنظر

ثالثاً: استخدام العلاقات الفرعية:

مثلاً

(1) $\omega^2 + 5 + \omega$

$$= \omega^2 + \omega + 5$$

فرعية = -1

$$= -1 + 5 = 4$$

(2) $5 + 3\omega + 3\omega^2$ (عامل مشترك ثم علامة فرعية)

$$= 5 + 3(\omega + \omega^2)$$

$$= 5 + 3(-1) = 2$$

الجزء الرابع

أنواع الأسئلة على الاوميكا

أثبت ان:

سؤال 1

$$\omega^7 + \omega^5 + 1 = 0$$

$$(\omega^3)^2 \cdot \omega + (\omega^3)^1 \omega^2 + 1 = 0$$

$$\omega + \omega^2 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

$$R.H.S = L.H.S$$

أثبت ان:

سؤال 2

$$(5 + 3\omega + 3\omega^2)^2 = 4$$

$$\text{الطرف الايسر} = [5 + 3(\underbrace{\omega + \omega^2}_{\text{فرعية}})]^2$$

$$= [5 + 3(-1)]^2 = (5 - 3)^2$$

$$= (2)^2 = 4 \quad \text{الطرف الايمن}$$

$$-4(2 + \omega + 2\omega^2)^3 = 4$$

أثبت ان:



$$\text{الطرف الايسر} = -4(2 + \omega + 2\omega^2)^3$$

$$= -4(2 + 2\omega^2 + \omega)^3 \quad \text{ترتيب الحدود قبل سحب العامل المشترك}$$

$$= -4 \left[2(\underbrace{1 + \omega^2}_{\text{فرعية}}) + \omega \right]^3$$

$$= -4 [2(-\omega) + \omega]^3$$

$$= -4(-2\omega + 1\omega)^3$$

$$= -4(-\omega)^3$$

$$= 4\omega^3 = 4(1) = 4 \quad \text{الطرف الايمن}$$

$$(1 + \omega^2)^3 + (1 + \omega)^3 = -2$$

أثبت ان:



$$\text{الطرف الايسر} = (\underbrace{1 + \omega^2}_{\text{فرعية}})^3 + (\underbrace{1 + \omega}_{\text{فرعية}})^3$$

$$= (-\omega)^3 + (-\omega^2)^3$$

$$= -\omega^3 - \omega^6$$

$$= -\omega^3 - (\omega^3)^2$$

$$= -1 - 1 = -2 \quad \text{الطرف الايمن}$$

انتبه!

عند الرفع تضرب الاسس

سؤال 5

أثبت ان:

$$\left(1 - \frac{2}{\omega^2} + \omega^2\right) \left(1 + \omega - \frac{5}{\omega}\right) = 18$$

$$\text{الطرف الايسر} = \left(1 - \frac{2}{\omega^2} + \omega^2\right) \left(1 + \omega - \frac{5}{\omega}\right)$$

$$= \left[\underbrace{1 + \omega^2 - \frac{2}{\omega^2}(\omega^3)}_{\text{فرعية}} \right] \left[\underbrace{1 + \omega - \frac{5}{\omega}(\omega^3)}_{\text{فرعية}} \right]$$

$$= (-\omega - 2\omega) (-\omega^2 - 5\omega^2)$$

$$= (-3\omega) (-6\omega^2) = 18\omega^3$$

$$= 18 (1) = 18 = \text{الطرف الايمن}$$

سؤال 6

أثبت ان:

$$\left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{2+\omega^2}\right)^2 = \frac{-1}{3}$$

$$\text{الطرف الايسر} = \left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{2+\omega^2}\right)^2 \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$= \left[\frac{(2+\omega^2) - (2+\omega)}{(2+\omega) \cdot (2+\omega^2)} \right]$$

$$= \left(\frac{\cancel{2} + \omega^2 - \cancel{2} - \omega}{4 + 2\omega^2 + 2\omega + \omega^3} \right)^2 = \left[\frac{\omega^2 - \omega}{5 + 2(\omega^2 + \omega)} \right]^2$$

فرعية (-1)

$$\omega^3 \cdot \omega = \omega$$

$$= \left(\frac{\omega^2 - \omega}{5 + 2(-1)} \right)^2 = \frac{(\omega^2 - \omega)^2}{(3)^2} = \frac{\omega^4 - 2\omega^3 + \omega^2}{9}$$

$$= \frac{\omega + \omega^2 - 2}{9} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} = \text{الطرف الايمن}$$

المعادلة التربيعية

القانون $x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

كُون المعادلة التربيعية التي جذراها:

(2) $1 - i\omega^2, 1 - i\omega$

مجموع الجذرين $= (1 - i\omega^2) + (1 - i\omega)$

$= 2 - i\omega^2 - i\omega$

عامل مشترك $(-i)$

$= 2 - i(\omega^2 + \omega)$

$= 2 - i(-1) = 2 + i$

حاصل ضرب الجذرين $= (1 - i\omega^2)(1 - i\omega)$

$= 1 - i\omega - i\omega^2 + i^2\omega^3$

عامل مشترك

$= 1 - i(\omega + \omega^2)$

$= -i(-1) = i$

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\Rightarrow x^2 - (2 + i)x + i = 0$

(1) $1 + \omega^2, 1 + \omega$

مجموع الجذرين $= (1 + \omega^2) + (1 + \omega)$

فرعية $= -\omega - \omega^2$

$= 1$

حاصل ضرب الجذرين $= (1 + \omega^2)(1 + \omega)$

$= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3$

$= 1 + (-1) + 1 = 1$

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$x^2 - 1x + 1 = 0$

(4) $\frac{\omega}{2-\omega^2}, \frac{\omega^2}{2-\omega}$

مجموع الجذور = $\frac{\omega}{2-\omega^2} + \frac{\omega^2}{2-\omega}$ توحيد مقامات

= $\frac{\omega(2-\omega) + \omega^2(2-\omega^2)}{(2-\omega^2)(2-\omega)}$

= $\frac{2\omega - \omega^2 + 2\omega^2 - \omega^4}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + \omega^3}$ $\omega^3 \cdot \omega = \omega$

= $\frac{2\omega - \omega^2 + 2\omega^2 - \omega}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + 1}$

= $\frac{\omega + \omega^2}{5 - 2\omega - 2\omega^2}$

= $\frac{2(\omega + \omega^2) + 1}{5 - 2(\omega + \omega^2)}$

= $\frac{-2 + 1}{5 - 2(-1)} = \frac{-1}{5 + 2} = \frac{-1}{7}$

حاصل ضرب الجذور = $\frac{\omega}{2-\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{2-\omega}$

= $\frac{\omega^3}{4 - 2\omega - 2\omega^2 + \omega^3} = \frac{1}{7}$

$x^2 - \left(\text{مجموع الجذور} \right) x + \left(\text{حاصل ضرب الجذور} \right) = 0$

$x^2 - \left(\frac{-1}{7} \right) x + \left(\frac{1}{7} \right) = 0$

(3) $\frac{3i}{\omega^2}, \frac{-3\omega^2}{i}$

$m = \frac{3i}{\omega^2} (\omega^3) = 3i\omega$

$L = \frac{-3\omega^2}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \Rightarrow L = \frac{3\omega^2 i}{-i^2} \rightarrow (1)$

$L = 3\omega^2 i$

مجموع الجذور = $3i\omega + 3\omega^2 i$

= $3i(\omega + \omega^2)$
 فرعية

= $3i(-1) = -3i$

حاصل ضرب الجذور = $(3i\omega)(3i\omega^2)$

= $9i^2 \omega^3$

= $9(-1)(+1) = -9$

$x^2 - \left(\text{مجموع الجذور} \right) x + \left(\text{حاصل ضرب الجذور} \right) = 0$

$x^2 - (-3i)x + (-9) = 0$

تابعونا على التليكرام

@iQRES



الأسئلة الوزارية حول موضوع ω

$$Z = \frac{4 + 2i\omega + 2i\omega^2}{3 - i\omega^2 - i\omega}$$

جد المقياس والقيمة الأساسية لسعة العدد المركب

سؤال 1

2016
تمهيدى

الحل

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\theta = 2\pi - \text{زاوية الاسناد}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{4}$$

القيمة الأساسية لسعة العدد
المركب Z

$$Z = \frac{4 + 2i\omega + 2i\omega^2}{3 - i\omega^2 - i\omega}$$

$$Z = \frac{4 + 2i(\omega + \omega^2)}{3 - i\omega^2 + \omega} \rightarrow \text{فرعية}$$

$$Z = \frac{4 + 2i(-1)}{3 - i(-1)} = \frac{4 - 2i}{3 + i}$$

$$Z = \frac{4 - 2i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i}$$

$$Z = \frac{12 - 4i - 6i + 2i^2}{9 + 1} \rightarrow (-2)$$

$$Z = \frac{10 - 10i}{10} = \frac{10}{10} - \frac{10}{10}i$$

$$Z = 1 - i \Rightarrow Z = (1, -1)$$

الربع الرابع

$$\|Z\| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}$$

المقياس



سؤال 2 أثبت ان $\left(5 - \frac{5}{\omega^2 + 1} + \frac{3}{\omega^2}\right)^6 = 64$

2016 - د (1)

الطرف الايسر = $\left(5 - \frac{5}{\omega^2 + 1} + \frac{3}{\omega^2}\right)$
فرعية

= $\left(5 - \frac{5}{-\omega} + \frac{3}{\omega^2}\right)^6 = \left[5 + \frac{5}{\omega}(\omega^3) + \frac{3}{\omega^2} \cdot \omega^3(\omega^3)\right]^6$

= $(5 + 5\omega^2 + 3\omega)^6$

= $\left(5(1 + \omega^2) + 3\omega\right)^6$
فرعية -1

= $(-5\omega + 3\omega)^6 = 2^6(-2\omega)^6 \cdot \omega^6 = 64(1) = 64$

∴ الطرف الايسر = الطرف الايمن



باستخدام مبرهنة دي موافر جد الجذور التربيعية للعدد

سؤال 3

(2016 - د 2)

$$Z = \frac{1 + \omega i + \omega^2 i}{1 - \omega i - \omega^2 i}$$

الحل

$$Z = \frac{1 + i(\omega + \omega^2)}{1 - i(\omega + \omega^2)} \rightarrow \text{فرعية}$$

$$= \frac{1 + i(-1)}{1 - i(-1)} = \frac{1 - i}{1 + i}$$

$$Z = \frac{1 - i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i}$$

$$Z = \frac{-i - i - 1 + 1}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$Z = 0 - i \Rightarrow Z = (0, -1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} \Rightarrow r = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{زاوية الاسناد} \\ \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

* زاوية الاسناد $\frac{3\pi}{2}$ لا تنتهي لأي ربع فتبقى نفسها θ

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

الاركان الاربعة:

$$r = 1, \theta = \frac{3\pi}{2}, n = 2, k = 0, 1$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

عندما $k=0$

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z_1 = (1)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$Z_1 = 1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \quad 45 \times 3 = 135 \text{ في الربع الثاني}$$

$$Z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

عندما $k=1$

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \quad 7 \times 45 = 315 \text{ في الربع الرابع}$$

$$Z_2 = (1)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right]$$

$$Z_2 = \left(+\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$



$$\frac{1+3 Z^{10}+3 Z^{11}}{1-3 Z^7-3 Z^8}$$

إذا كان $Z^2+Z+1=0$ جد قيمة

سؤال 4

وزاري/كتاب

الحل

$$\frac{1+3(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)} = \frac{1-3}{1+3}$$

$$= \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

بوضح $Z = \omega^2$

$$= \frac{1+3(\omega^2)^{10}+3(\omega^2)^{11}}{1-3(\omega^2)^7-3(\omega^2)^8}$$

$$= \frac{1+3\omega^{20}+3\omega^{22}}{1-3\omega^{14}-3\omega^{16}}$$

$$= \frac{1+3(\omega^3)^6 \cdot \omega^2+3(\omega^3)^7 \cdot \omega}{1-3(\omega^3)^4 \cdot \omega^2-3(\omega^3)^5 \cdot \omega}$$

$$= \frac{1+3\omega^2+3\omega}{1-3\omega^2-3\omega}$$

$$= \frac{1+3(\omega^2+\omega)}{1-3(\omega^2+\omega)}$$

$$= \frac{1-3}{1+3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$Z^2+Z+1=0$$

$$a=1, b=1, c=1$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

قانون
الدستور

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{أما } Z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega$$

$$\text{أو } Z = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \omega^2$$

بوضح $Z = \omega$

$$\frac{1+3 Z^{10}+3 Z^{11}}{1-3 Z^7-3 Z^8}$$

$$\frac{1+3 \omega^{10}+3 \omega^{11}}{1-3 \omega^7-3 \omega^8}$$

$$= \frac{1+3(\omega^3)^3 \cdot \omega+3(\omega^3)^3 \cdot \omega^2}{1-3(\omega^3)^2 \cdot \omega-3(\omega^3)^2 \cdot \omega^2}$$

$$= \frac{1+3\omega+3\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2}$$

WWW.iQ-RES.COM

الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق



موقع طلاب العراق

” (... شارك رابط موقعنا ...)
مع اصدقائك لتعم الفائدة
ولا تنسونا من صالح دعائكم
“

نتائج

كتب

ملازم

أخبار

أسئلة

التعليم العالي

وزارة التربية

تابعونا ..



@iQRES



/ iQRES



/ NTAAj.iQ

كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي

الفصل الثاني

القطع المكافئ

“



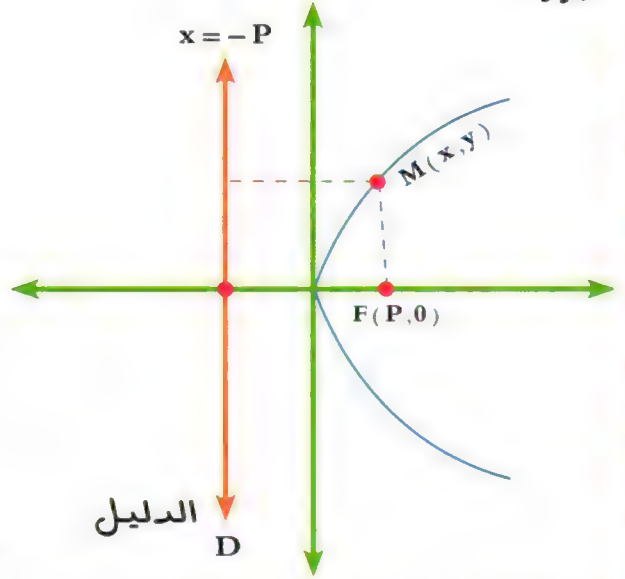
صفحاتنا على الفيس بوك

 / iQRES

 / NTAAj.iQ”

القطع المكافئ

هو مجموعة النقاط في المستوى والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(P, 0)$ يسمى البؤرة حيث $(P > 0)$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم (D) يسمى الدليل لا يحوي البؤرة.



البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ $2P =$

معادلة القطع القياسية	معادلة الدليل	البؤرة	للقطع المكافئ أربع حالات:
$y^2 = 4Px$	$x = -P$	$F(P, 0)$	أولاً: فتحة القطع نحو اليمين
$y^2 = -4Px$	$x = +P$	$F(-P, 0)$	ثانياً: فتحة القطع نحو اليسار
$x^2 = 4Py$	$y = -P$	$F(0, P)$	ثالثاً: فتحة القطع نحو الأعلى
$x^2 = -4Py$	$y = +P$	$F(0, -P)$	رابعاً: فتحة القطع نحو الأسفل

حول معادلة القطع المكافئ القياسية:

ملاحظة

- تحتوي على متغيرين x, y أحدهما تربيع والآخر اس (1).
- القطع على محور المتغير الذي لا يحتوي تربيع.
- معامل متغير التربيع $= 1$. أنظر إلى معامل x^2 و y^2 في المعادلات كلها $= 1$.



إذا طلب البؤرة والدليل

مثال

جد البؤرة ومعادلة الدليل لكل من القطوع المكافئ الآتية:

(5) $\frac{1}{5}x - y^2 = 0$

$\frac{1}{5}x = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5}x$ نحو اليمين

$y^2 = 4Px$

$\left[4P = \frac{1}{5}\right] \div 4$

$P = \frac{1}{20}$

معادلة الدليل $F\left(\frac{1}{20}, 0\right)$, $x = \frac{-1}{20}$

(6) $3x^2 - 24y = 0$

$[3x^2 = 24y] \div 3 \Rightarrow x^2 = 8y$

$x^2 = 4Py$

$[4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

معادلة الدليل $F(0, 2)$, $y = -2$

(7) $y^2 = 4x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

$F(1, 0)$, $x = -1$

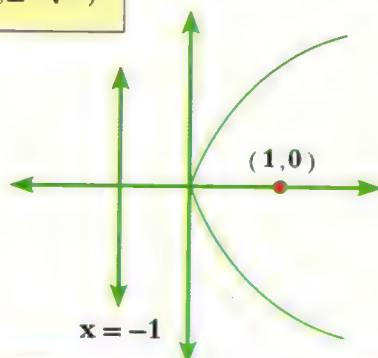
x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	± 2	(1, ± 2)
3	$\pm 2\sqrt{3}$	(3, $\pm 2\sqrt{3}$)

إذا طلب الرسم:

نأخذ قيم x

ونعوضها بالمعادلة

ونجد y ثم نرسم.



(1) $y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

معادلة الدليل $F(-2, 0)$, $x = +2$

(2) $x^2 = 4y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

معادلة الدليل $F(0, 1)$, $y = -1$

(3) $2x + 16y^2 = 0$

$[16y^2 = -2x] \div 16$

$y^2 = -\frac{1}{8}x$ نحو اليسار

$y^2 = -4Px$

$\left[4P = \frac{1}{8}\right] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{32}$

معادلة الدليل $F\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$, $x = \frac{1}{32}$

(4) $\frac{1}{2}y^2 = 8x$

نضرب المعادلة اعلاه في (2) لجعل معامل y^2 يساوي واحد حسب ملاحظات معادلة القطع المكافئ القياسية.

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$ يمين

$P = 4$

معادلة الدليل $F(4, 0)$, $x = -4$



أولاً: إذا أعطى بؤرة القطع المكافئ F معناها أعطى P

(1) نختار المعادلة المناسبة حسب البؤرة.

(2) نعوض P مباشرة ← **انتبه!** نعوض P موجبة دائماً في المعادلة القياسية.

مثال 1 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0,5) ورأسه نقطة الاصل.

$$F(0,5) \rightarrow \text{أعلى} \rightarrow P=5$$

$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 4(5)y \Rightarrow x^2 = 20y$$

مثال 2 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (3,0) ورأسه نقطة الاصل.

$$F(3,0) \rightarrow \text{يمين} \rightarrow P=3$$

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$$

مثال 3 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $(0, \sqrt{2})$.

$$F(0, \sqrt{2}) \rightarrow \text{أعلى} \rightarrow P=\sqrt{2}$$

$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 4(\sqrt{2})y \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{2}y$$

مثال 4 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (0,-4).

$$P=4 \rightarrow \text{أسفل} \rightarrow (0,-4)$$

$$x^2 = -4Py$$

$$x^2 = -4(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$$

مثال 5 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (5,0) ورأسه نقطة الاصل.

$$P=5 \Rightarrow \text{يمين} \Rightarrow (5,0)$$

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$$

مثال 6 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-4,0) ورأسه نقطة الاصل.

$$P=4 \rightarrow \text{يسار} \rightarrow (-4,0) \text{ نعوض (+)}$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -16x$$

ثانياً: إذا أعطى معادلة الدليل معناها أعطى (P) وتذكر ان اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة.

مثلاً: إذا أعطى معادلة الدليل $x = +3$ البؤرة سالبة لأن الدليل + ((القطع يسار X))

$y = -5$ البؤرة موجبة لأن الدليل - ((القطع أعلى Y))

$x = -\sqrt{2}$ البؤرة موجبة لأن الدليل - ((القطع يمين X))



مثال 7

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y = 7$ والرأس نقطة الاصل.

$$y = 7 \rightarrow P = 7$$

البؤرة سالبة لأن الدليل (+) / أسفل (y)

$$x^2 = -4Py$$

$$x^2 = -4(7)y$$

$$x^2 = -28y$$

مثال 8

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $2x - 6 = 0$.

$$2x - 6 = 0$$

$$[2x = 6] \div 2 \Rightarrow x = 3$$

البؤرة سالبة لأن الدليل موجب $P = 3$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -4(3)x$$

$$y^2 = -12x$$

مثال 9

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $4y + 3 = 0$ ورأسه نقطة الاصل.

$$4y + 3 = 0$$

$$[4y = -3] \div 4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$$

البؤرة موجبة لأن الدليل سالب

$$P = \frac{3}{4}$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$$

$$x^2 = 3y$$

انتبه!

لاتنسى ان تعويض P يكون موجب دائماً في المعادلة القياسية

ملاحظة ومثال

إذا أعطى في السؤال نقطتين وقا ان القطع يمر بالنقطتين فإن خطوات لحل هي:

- 1) نعين النقاط في الارباع لتحديد فتحة القطع.
- 2) نختار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع.
- 3) نعوض واحدة من النقاط بـ x, y ونجد P ونعوض (P) بالمعادلة القياسية.



جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 5)$ ، $(2, -5)$ والرأس نقطة الاصل.

ربع أول $\rightarrow (2, 5)$

ربع رابع $\rightarrow (2, -5)$

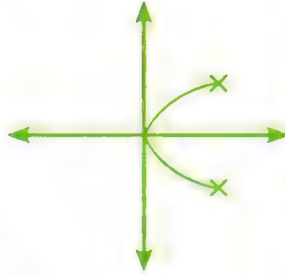
القطع نحو اليمين .

$$y^2 = 4Px \quad (2, 5)$$

$$(5)^2 = 4(P)(2)$$

$$[25 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{25}{8}$$

$$y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$$



جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2, 4)$ ، $(2, -4)$ والرأس نقطة الاصل.

ربع أول $\rightarrow (2, 4)$

ربع رابع $\rightarrow (2, -4)$

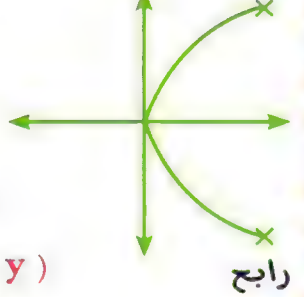
القطع نحو اليمين .

$$y^2 = 4Px \quad (x, y) \quad (2, 4)$$

$$(4)^2 = 4P(2)$$

$$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = 2$$

$$y^2 = 8x$$



جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من $(\sqrt{3}, 6)$ $(-1, 2)$ ولأسه نقطة الاصل... اضافي.

ربع أول $(\sqrt{3}, 6)$

ربع ثاني $(-1, 2)$

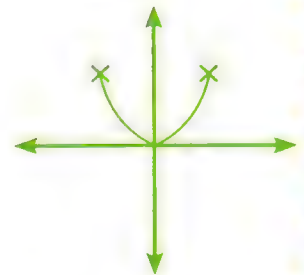
القطع نحو الأعلى.

$$x^2 = 4Py \quad (\sqrt{3}, 6) \quad \text{نختار أي نقطة}$$

$$(\sqrt{3})^2 = 4P(6)$$

$$[3 = 24P] \div 24 \Rightarrow P = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$$



إستراحة شهرية:

زمالك الحاسدون بكل غيب
وعيبك أن حسنك لا يُعاب

ملاحظة ومثال

إذا أعطى نقطة واحدة فقط (x, y) وقال ان القطع يمر من النقطة (x, y) هناك حالتان:

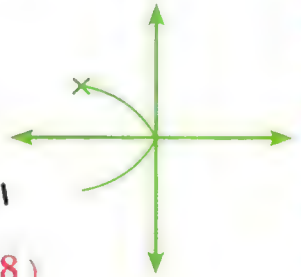
الاولى

ان يحدد موقع البؤرة (على محور السينات أو الصادات) وهنا يوجد معادلة واحدة للقطع ← تابع المثال .

13

مثال

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-1, 8)$ وبؤرته على محور السينات ورأسه نقطة الأصل ... اضافي .



ربع ثاني $\rightarrow (-1, 8)$

البؤرة سينات ← يسار

$$y^2 = -4Px \quad (-1, 8)$$

$$8^2 = -4P(-1)$$

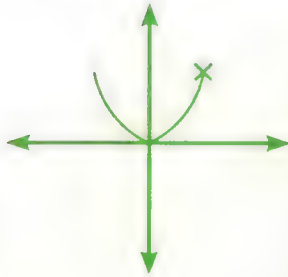
$$64 = 4P \Rightarrow P = \frac{64}{4} \Rightarrow P = 16$$

$$y^2 = -4(16)x \Rightarrow y^2 = -64x$$

14

مثال

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطة $(\sqrt{2}, 1)$ وبؤرته على محور الصادات ... اضافي .



ربع أول $\rightarrow (\sqrt{2}, 1)$

البؤرة صادات ← أعلى

$$x^2 = 4Py \quad (\sqrt{2}, 1)$$

$$(\sqrt{2})^2 = 4P(1)$$

$$[2 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2y$$

الثانية

لا يحدد موقع البؤرة لذلك هناك احتمالين

بؤرة سينات

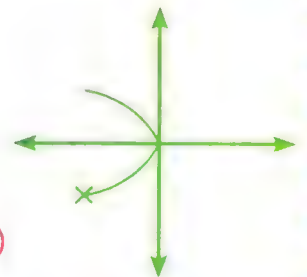
بؤرة صادات

15

مثال

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-2, -4)$ ورأسه نقطة الأصل .

بؤرة سينات/يسار



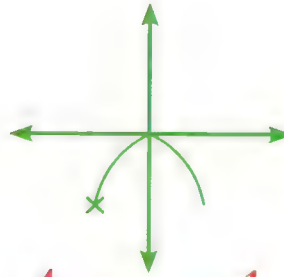
$$y^2 = -4Px$$

$$(-4)^2 = -4P(-2)$$

$$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{16}{8} \Rightarrow P = 2$$

$$y^2 = -8x$$

بؤرة صادات/اسفل



$$x^2 = -4Py$$

$$(-2)^2 = -4P(-4)$$

$$[4 = 16P] \div 16 \Rightarrow P = \frac{4}{16} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = -y$$

ملاحظة ومثال

إذا أعطى في السؤال نقطة (x, y) وقال ان دليل القطع يمر من هذه النقطة.

انتبه!

لا نعوض هذه النقطة أبداً في معادلة القطع المكافئ القياسية لأن القطع لا يمر بها ولا تحققت معادلة القطع.

مثال 16

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع بالنقطة $(3, -5)$.

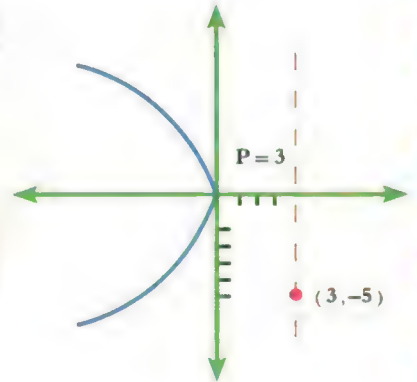
الاحتمال الأول:

$$P = 3$$

$$y^2 = -4Px$$

$$y^2 = -4(3)x$$

$$y^2 = -12x$$



مثال 17

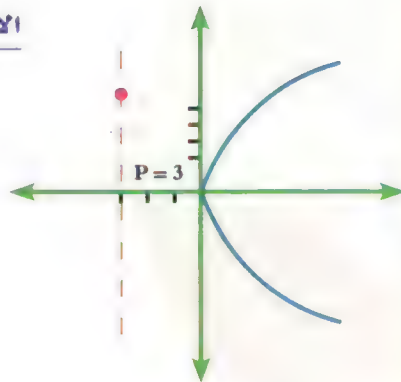
إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3, 4)$ والرأس نقطة الأصل جد معادلة القطع.

الاحتمال الأول:

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$



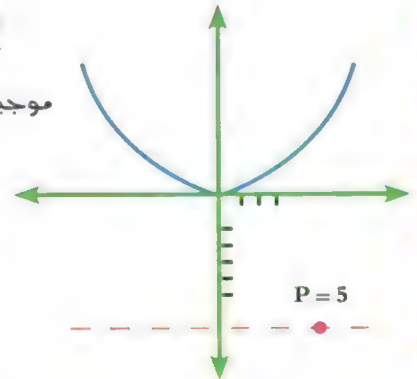
الاحتمال الثاني:

موجبة لاتنسلي $(P = 5)$

$$x^2 = 4Px$$

$$x^2 = 4(5)y$$

$$x^2 = 20y$$

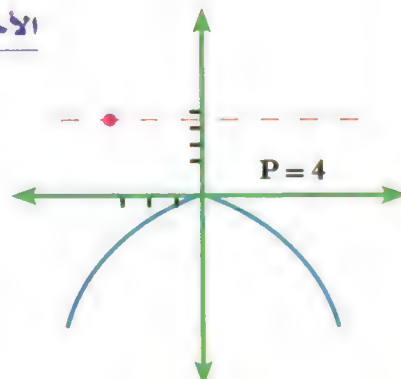


الاحتمال الثاني:

$$x^2 = -4Px$$

$$x^2 = -4(4)y$$

$$x^2 = -16y$$



مثال 18

قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويبر من النقطة $(1, 2)$ جد قيمة (A) ثم جد البؤرة والدليل وارسم القطع.

$$\begin{aligned} Ax^2 + 8y &= 0 \\ A(1)^2 + 8(2) &= 0 \\ A + 16 &= 0 \Rightarrow A = -16 \end{aligned}$$

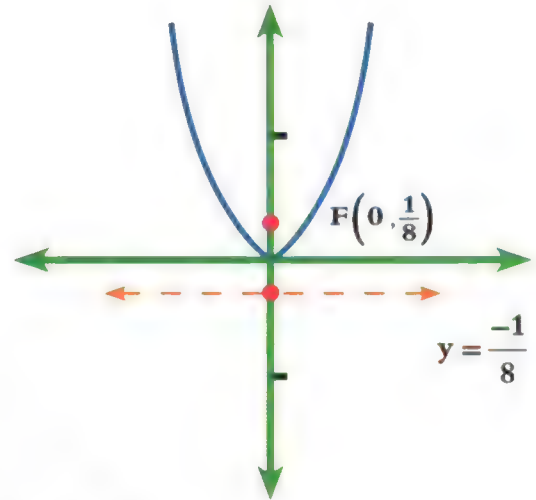
$$-16x^2 + 8y = 0 \Rightarrow [-16x^2 = -8y] + -16$$

$$\frac{-16x^2}{-16} = \frac{-8y}{-16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y \quad \text{أعلى}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 4Py \\ \left[4P = \frac{1}{2} \right] + 4 \\ P &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

البؤرة $F(0, \frac{1}{8})$

معادلة الدليل $y = \frac{-1}{8}$



Notes:



إيجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف

مثال 19 باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(7, 0)$ والرأس نقطة الأصل.

حسب التعريف $L_1 = L_2$

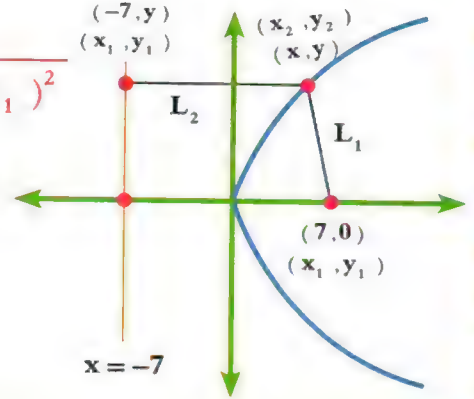
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x - 7)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + 7)^2 + (y - y)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49 + 0^2$$

مربع حدانية مربع حدانية

$$y^2 = 14x + 14x \Rightarrow y^2 = 28x$$



مثال 20 جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y = \sqrt{3}$ باستخدام التعريف.

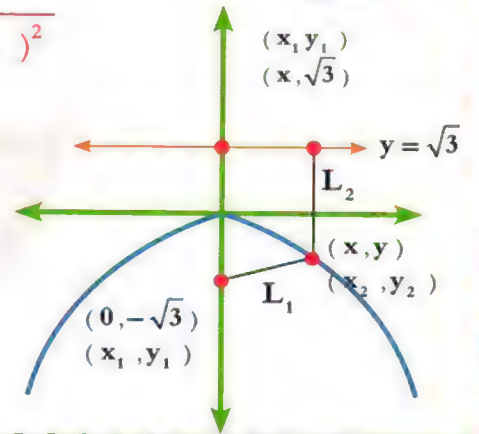
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + \sqrt{3})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - \sqrt{3})^2}$$

بالتربيع

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = 0^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$$

$$x^2 = -2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3}y$$



مثال 21 باستخدام التعريف جد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(\sqrt{3}, 0)$ والرأس نقطة الأصل.

حسب التعريف $L_1 = L_2$

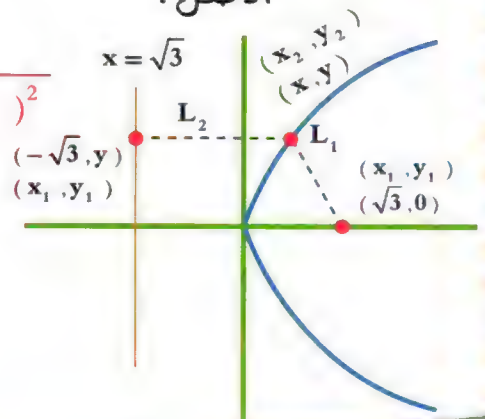
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + \sqrt{3})^2 + (y - y)^2}$$

بالتربيع

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + 0$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$



الأسئلة الوزارية حول موضوع القطع المكافئ

سؤال 3 قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6, 3)$ جد قيمة h .

2008
تمهيدي

$$\left[\frac{1}{4}y^2 = hx\right] \cdot 4$$

$$y^2 = 4hx$$

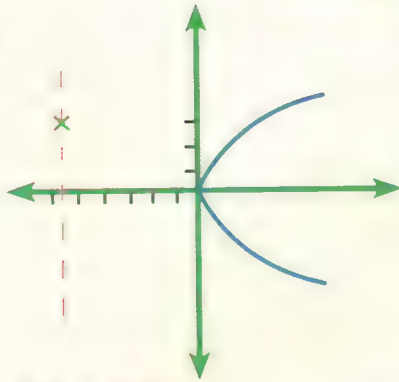
$$P = 6$$

$$y^2 = 4(6)x$$

$$y^2 = 24x$$

$$y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24$$

$$h = 6$$



ملاحظة

عرفنا ان القطع على محور السينات لأن المعادلة بدلالة (y^2) . ولا يمكن تعويض النقطة $(-6, 3)$ لأن الذي يمر بها الدليل وليس القطع.

WWW.10RES.COM

استراحة شعرية:

فيا ليت الذي بيني وبينك باب يطرُق
ويا ليت أطراف الأرض تطوئ فنلتقي

سؤال 1 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(3, 6)$, $(-3, 6)$ ثم جد معادلة دليله.

2006 - د (1)

ربع أول $\rightarrow (3, 6)$

ربع رابع $\rightarrow (-3, 6)$

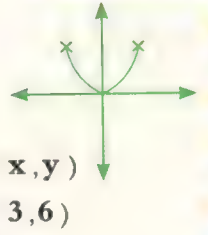
$$x^2 = 4Py \quad ((\text{نحو الأعلى}))$$

$$(3)^2 = 4P(6)$$

$$9 = 24P \Rightarrow P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y$$

$$y = -P \Rightarrow y = -\frac{3}{8} \quad \text{معادلة الدليل}$$



سؤال 2 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, 3)$, $(1, -3)$ ثم جد معادلة دليله.

2006 - د (2)

ربع أول $\rightarrow (3, 6)$

ربع رابع $\rightarrow (1, -3)$

$$(-3, 6) \rightarrow$$

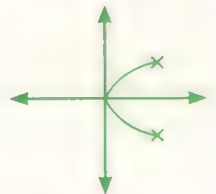
$$y^2 = 4Px$$

$$(3)^2 = 4P(1)$$

$$[9 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{9}{4}$$

$$y^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right)x \Rightarrow y^2 = 9x$$

$$x = -P \rightarrow x = -\frac{9}{4} \quad \text{معادلة الدليل}$$



انسحاب المحاور للقطع المكافئ

أولاً معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ورأسه $O(h, k)$

(1) الفتحة لليمين:

$$(y - k)^2 = 4P(x - h) \quad \text{المعادلة القياسية}$$

الرأس $\bar{O}(h, k)$

البؤرة $\bar{F}(P + h, k)$

معادلة الدليل $\bar{x} = -P + h$

معادلة المحور $\bar{y} = k$

(2) الفتحة لليسار:

$$(y - k)^2 = -4P(x - h) \quad \text{المعادلة القياسية}$$

الرأس $\bar{O}(h, k)$

البؤرة $\bar{F}(-P + h, k)$

معادلة الدليل $\bar{x} = P + h$

معادلة المحور $\bar{y} = k$

ثانياً معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه $O(h, k)$

(1) الفتحة للأعلى:

$$(x - h)^2 = 4P(y - k) \quad \text{المعادلة القياسية}$$

الرأس $\bar{O}(h, k)$

البؤرة $\bar{F}(h, P + k)$

معادلة الدليل $\bar{y} = -P + k$

معادلة المحور $\bar{x} = h$

(2) الفتحة للأسفل:

$$(x - h)^2 = -4P(y - k) \quad \text{المعادلة القياسية}$$

الرأس $\bar{O}(h, k)$

البؤرة $\bar{F}(h, -P + k)$

معادلة الدليل $\bar{y} = P + k$

معادلة المحور $\bar{x} = h$

جد الرأس والبؤرة ومعادلتها المحاور
والدليل للقطع المكافئ:

$$(x-1)^2 = 8(y-1)$$

$$h=1, k=1$$

$$[4P=8] \div 4 \Rightarrow P=2$$

$$\bar{o}(h, k) \Rightarrow (1, 1) \quad \text{الرأس:}$$

$$\bar{F}(h, P+k) \quad \text{البؤرة:}$$

$$\bar{F}(1, 2+1) \Rightarrow \bar{F}(1, 3)$$

$$y = -P + k \quad \text{معادلة الدليل:}$$

$$y = -2 + 1 \Rightarrow y = -1$$

$$x = h \quad \text{معادلة المحور:}$$

$$x = 1$$

جد الرأس والبؤرة ومعادلتها المحاور
والدليل للقطع المكافئ:

$$(y+1)^2 = 4(x-2)$$

$$h=2, k=-1$$

$$[4P=4] \div 4 \Rightarrow P=1$$

$$\bar{o}(h, k) \Rightarrow (2, -1) \quad \text{الرأس:}$$

$$\bar{F}(P+h, k) \quad \text{البؤرة:}$$

$$\bar{F}(1+2, -1) \Rightarrow \bar{F}(3, -1)$$

$$x = -P + h \quad \text{معادلة الدليل:}$$

$$x = -1 + 2 \Rightarrow x = 1$$

$$y = k \quad \text{معادلة المحور:}$$

$$y = -1$$

**** ملاحظة حول استخراج قيم h, k من معادلة القطع المكافئ القياسية:**

$$(y+1)^2 = 4(x-2)$$

الرقم الذي داخل قوس y يمثل
قيمة k دائماً ولكن نعكس اشارته
فهنا الرقم 1 فتكون $k = -1$

الرقم الذي داخل قوس x يمثل
قيمة h دائماً ولكن نعكس اشارته
فهنا الرقم -2 فتكون $h = 2$

مثال توضيحي

ناقش القطع المكافئ $y = x^2 + 4x$

مثال 3

أولاً: اجعل المتغير الذي يحوي التربيع وكل ما يتعلق به في طرف والمتغير الذي لا يحوي التربيع في طرف آخر (وهذه الخطوة متحققة في هذا المثال ولا نحتاج إلى ترتيب)

$$y = x^2 + 4x$$

ثانياً: نقوم بالنظر إلى المتغير الذي يحوي التربيع وهنا هو المتغير X ثم نذهب لنأخذ نصف معامل X وليس X^2 ونقوم بتربيعة وإضافته للطرفين فهنا معامل X هو 4 نأخذ نصفه وهو 2 وتربيعه 2 هو 4 حيث نضيف الرقم 4 للطرفين كما موضح داخل الدائرة

$$y + 4 = x^2 + 4x + 4$$

ثالثاً: نحلل الطرف الذي يحوي التربيع مربع كامل وتصبح المعادلة بالشكل القياسي.

$$(y + 4) = (x + 2)^2$$

$$(x + 2)^2 = (y + 4)$$

$$h = -2, \quad k = -4$$

$$[4P = 1] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

$$\bar{O}(h, k) \Rightarrow (-2, -4) \quad \text{الرأس}$$

$$\bar{F}(h, P+k) \Rightarrow \left(-2, \frac{1}{4} - 4\right) \quad \text{البؤرة}$$

$$\bar{F}\left(-2, -3\frac{3}{4}\right)$$

$$\bar{y} = -P + k \quad \text{معادلة الدليل}$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{4} - 4 \Rightarrow \bar{y} = -4\frac{1}{4}$$

$$\bar{x} = h \quad \text{معادلة المحور}$$

$$\bar{x} = -2$$



مثال 4

جد الرأس والبؤرة ومعادلتى المحور والدليل للقطع المكافئ:

$$y^2 + 4y + 2x = -6$$

$$y^2 + 4y = -6 - 2x$$

نضيف مربع نصف معامل y للطرفين

$$y^2 + 4y + 4 = -6 - 2x + 4$$

$$(y + 2)^2 = -2x - 2$$

$$(y + 2)^2 = -2(x + 1) \quad \text{معادلة القطع القياسية}$$

$$k = -2, \quad h = -1$$

$$[4P = 2] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

$$\bar{o}(h, k) \Rightarrow (-1, -2)$$

الرأس:

$$\bar{F}(-P + h, k)$$

البؤرة:

$$\bar{F}\left(-\frac{1}{2} - 1, -2\right) \Rightarrow \bar{F}\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$$

$$\bar{x} = P + h$$

معادلة الدليل:

$$\bar{x} = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = k$$

معادلة المحور:

$$\bar{y} = -2$$

مثال 5

جد الرأس والبؤرة ومعادلتى المحور والدليل للقطع المكافئ:

$$x^2 + 6x - y = 0$$

$$x^2 + 6x = y$$

$$x^2 + 6x + 9 = y + 9$$

$$(x + 3)^2 = (y + 9)$$

$$h = -3, \quad k = -9$$

$$[4P = 1] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

$$\bar{o}(h, k) \Rightarrow (-3, -9)$$

الرأس:

$$\bar{F}(h, P + k)$$

البؤرة:

$$\bar{F}\left(-3, \frac{1}{4} - 9\right) \Rightarrow \bar{F}\left(-3, -\frac{35}{4}\right)$$

$$\bar{F}\left(-3, -8\frac{3}{4}\right)$$

$$y = -P + k$$

معادلة الدليل:

$$y = -\frac{1}{4} - 9 \Rightarrow y = -9\frac{1}{4}$$

$$\bar{x} = h$$

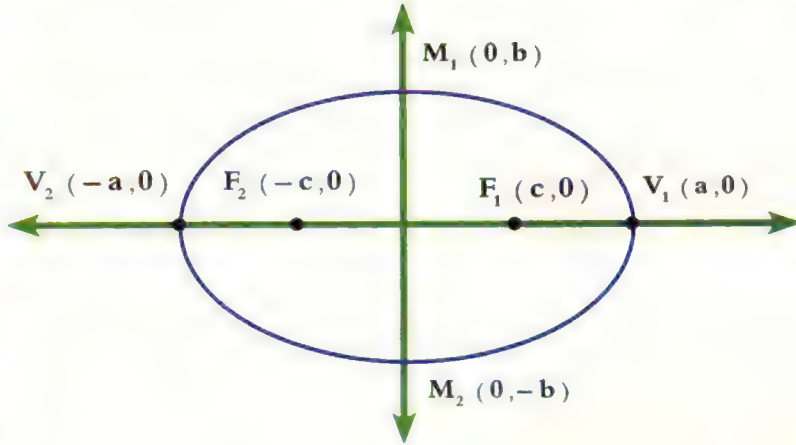
معادلة المحور:

$$\bar{x} = -3$$

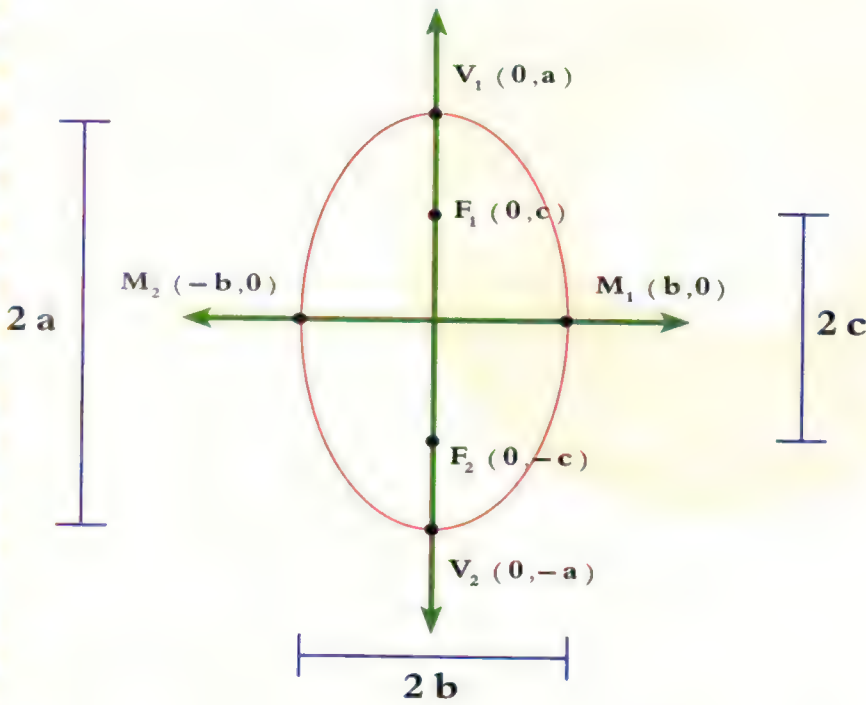
القسطع الناقص Ellipse

تعريف: هو مجموعة النقط على المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين (البؤرتان) عدد ثابت.

المصطلحات والرموز:



((قسطع ناقص بؤرتاه تنهيات
لهحور السينات))



((قسطع ناقص بؤرتاه تنهيات
لهحور الصادات))

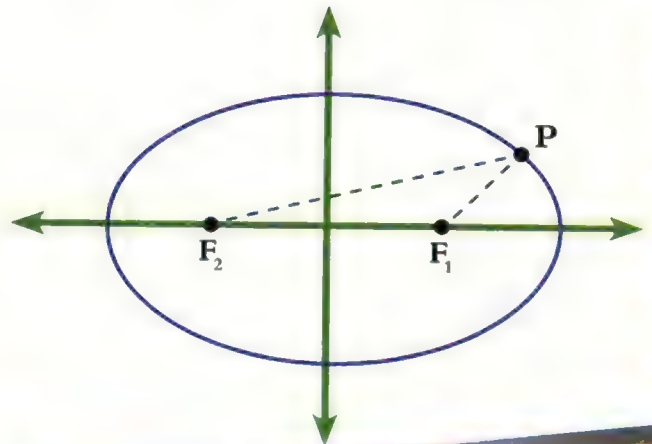
الرأسان $\leftarrow V_1, V_2$

البؤرتان $\leftarrow F_1, F_2$

القطبان $\leftarrow M_1, M_2$

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$PF_1 + PF_2$ / مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه



بعض الرموز

$2a$ = طول المحور الكبير ((البعد بين الرأسين)) ... ((العدد الثابت))

$2c$ = البعد بين البؤرتين ((البعد البؤري))

$2b$ = طول المحور الصغير ((البعد بين القطبين))

قوانين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1 معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

2 معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات

$$A = a b \pi$$

3 لايجاد مساحة القطع الناقص

$$P = 2 \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

4 لايجاد محيط القطع الناقص

$$e < 1 \quad e = \frac{c}{a}$$

أصغر من (1)

5 لايجاد الاختلاف المركزي

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

6 القانون العام للقطع الناقص

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

* معادلة المحور الكبير $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ إذا كان القطع بؤرتاه على محور الصادات .

* معادلة المحور الكبير $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ إذا كان القطع بؤرتاه على محور السينات .

ملاحظات حول القطع الناقص

أولاً: عندما يعطى

- بؤرة يعني c
- رأس يعني a
- قطب يعني b

ثانياً: إذا أعطى :

- (1) طول المحور الكبير مثلاً $(12) \leftarrow 2a = 12$ ونجد a
- (2) طول المحور الصغير مثلاً $(16) \leftarrow 2b = 16$ ونجد b
- (3) المسافة بين البؤرتين ((البعد البؤري)) مثلاً $(8) \leftarrow 2c = 8$ ونجد c

ثالثاً: كيف نحول الكلام الى صيغة رياضية ؟ \leftarrow تابع بعض العبارات :

- (1) مجموع طولي محوريه $\leftarrow 2a + 2b$
- (2) مجموع مربعي طولي محوريه $\leftarrow (2a)^2 + (2b)^2$
- (3) الفرق بين طولي محوريه \leftarrow إذا كان الفرق (+) $2a - 2b$
إذا كان الفرق (-) $2b - 2a$
- (4) النسبة :
النسبة بين طولي محوريه \leftarrow عندما النسبة أكبر من (1) أو $\frac{2a}{2b}$ او رقم كبير
عندما النسبة أصغر من (1) أو $\frac{2b}{2a}$ او رقم صغير

مثلاً :

النسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين البؤرتين
بسط $(2a)$ مقام $(2c)$ $\frac{2a}{2c}$

مثلاً :

النسبة بين البعد بين بؤرتيه الى طول محوره الصغير
بسط $(2c)$ مقام $(2b)$ $\frac{2c}{2b}$

بعد
كلمة الى
يصبح مقام
دائماً

انتبه !
 a أكبر من b أكبر من c دائماً
 $a > c$, $a > b$

انتبه !
الاختلاف المركزي e أصغر من (1) إذا أعطى اختلاف أصغر من (1) ولم يذكر نوع القطع فهذا القطع ناقص.

بعض المصطلحات الاضافية: كي تتعلم كيف تحول الكلام الى علاقة رياضية:

* مجموع طول محوره الكبير ونصف طول محوره الصغير

$$2a + \frac{1}{2}(2b)$$

طول محوره الكبير نصف طول محوره الصغير

* طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير بهقدار (4)

$$2a - 2b = 4$$

* طول محوره الكبير ثلاثة امثال طول محوره الصغير

$$2a = 3(2b)$$

محوره الكبير ثلاثة امثال محوره الصغير

إذا اعطى ((المساحة - المحيط - الاختلاف المركزي)) نستفاد من قوانين هذه المعطيات لإيجاد علاقة أو معادلة.

* حاول دائماً في حالة الربط بين القطع الناقص والمكافئ ان تجد (P) من معادلة القطع المكافئ لانها سوف تمثل a أو b أو c للناقص حسب السؤال.

موقع طلاب العراق

العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$P = C$$

مكافئ ناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$P = a$$

مكافئ ناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$P = C$$

مكافئ ناقص

ملاحظة هامة

(1) كل يمر $(x, 0)$, $(0, y)$ تعني اما (a) أو (b) شرط ان يكون اما $x = 0$ أو $y = 0$

سوف يمثل اما (a) أو (b)

(2) كل يمر سوف يمثل اما (a) أو (b)

* جد معادلة القطع الناقص الذي يمر دليل القطع المكافئ ... الخ .

$$P \rightarrow \text{سوف يمثل اما } (a) \text{ أو } (b)$$

اما b أو a

(3) كل يقطع عند رقم $x = \pm$ أو رقم $y = \pm$ هذا الرقم يمثل (a) أو (b) ويؤخذ موجب .

(4) عندما يذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

(5) نقطة التقاطع مع محور السينات $y = 0$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات .

$$2x - y = 8$$

$$y = 0$$

$$[2x = 8] \div 2 \Rightarrow x = 4$$

نقطة $(4, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات $x = 0$ (b)

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي احدى رأساه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات.

$$x^2 + y^2 - 3x = 16, \quad x = 0$$

$$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y \pm 4$$

$$x = 0$$

$$(0, 4), (0, -4)$$

استراحة شعرية:

قمرُ تكامل في المحاسن وانتهى
فالشمس تشرق من شقائق خده
ملكُ الجمال بأسره فكأنما
حسنُ البرية كلها من عنده

تابعونا على التلي كرام

@iQRES

مفحاتنا على الفيس بوك

f / iQRES

f / NTAAJ.iQ

الحالة الأولى:

إذا أعطى معادلة القطع الناقص واطلب معلومات القطع من (بؤرتان - رأسات ... مساحة محيط ... الخ) .

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

صادات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

سينات

أولاً: يجب ان نضع المعادلة بالشكل القياسي

هنا

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

لازم واحد

ثانياً: يجب ان يكون معامل x^2 ومعامل y^2 واحد

ثالثاً: إذا كان هناك ثابت (رقم) بعد اليساوي وكان عدد صحيح (ليس كسر) نقسم عليه

المعادلة ← تابع المثال التوضيحي $16x^2 + 9y^2 = 144$

$$\left[\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = \frac{144}{144} \right] \div 144 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

وإذا كان بعد اليساوي كسر نضرب المعادلة في مقلوب الكسر تابع المثال التالي:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{نضرب } \frac{3}{2}x \text{ وهو مقلوب الـ } \frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2}{12} \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{y^2}{3} \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

انتبه!

ينزل نحت

$$\frac{3x^2}{5} + \frac{2y^2}{7} = 1$$

المقام

في حالة وجود عدد (معامل) x^2 أو y^2 يصبح مقام للمقام ← مثلاً

$$\frac{x^2}{\frac{5}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{2}} = 1$$

مثال 2

عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي القطع $x^2 + 2y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{2y^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \quad \text{((سينات))}$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{الأصغر}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F_1(c, 0) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$F_2(-c, 0) \rightarrow F_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{((البؤرتان))}$$

$$V_1(a, 0) \rightarrow V_1(1, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \rightarrow V_2(-1, 0) \quad \text{((الرأسان))}$$

$$M_1(0, b) \rightarrow M_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$M_2(0, -b) \rightarrow M_2\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{((القطبان))}$$

$$\text{طول المحور الكبير} = 2a = 2(1) = 2 \text{ وحدة}$$

$$\text{طول المحور الصغير} = 2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \text{ وحدة}$$

$$y = 0 \leftarrow \text{معادلة المحور الكبير}$$

$$x = 0 \leftarrow \text{معادلة المحور الصغير}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad \text{((أصغر))}$$

* المركز $(0, 0)$ نقطة الأصل

مثال 1

جد طول كل من المحورين وإحداثي البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي ومساحة ومحيط القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{((المعادلة بالشكل القياسي))}$$

لاحتاج ترتيب

$$a^2 = 25 \leftarrow 25 \quad \text{العدد الأكبر هو}$$

$$b^2 = 16 \leftarrow 16 \quad \text{العدد الأصغر هو}$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$c = 3$$

$$\text{طول المحور الكبير} = 2a = 2(5) = 10 \text{ وحدة}$$

$$\text{طول المحور الصغير} = 2b = 2(4) = 8 \text{ وحدة}$$

$$F_1(c, 0) \rightarrow F_1(3, 0)$$

$$F_2(-c, 0) \rightarrow F_2(-3, 0) \quad \text{((البؤرتان))}$$

$$V_1(a, 0) \rightarrow V_1(5, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \rightarrow V_2(-5, 0) \quad \text{((الرأسان))}$$

((أصغر))

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6 < 1$$

$$A = a \cdot b\pi \Rightarrow A = (5 \times 4)\pi = 20\pi \text{ وحدة مربعة}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{25 + 16}{2}}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{41}{2}} \text{ وحدة}$$

مثال 4

ناقش القطع الناقص $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

$$4x^2 \left(\frac{3}{4}\right) + 3y^2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{3x^2}{1} + \frac{9y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

$$\frac{4}{9} \rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \text{ (صادات)}$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (أصغر)}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4-3}{9}}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$F_1(0, c) \rightarrow F_1(0, \frac{1}{3})$$

$$F_2(0, -c) \rightarrow F_2(0, -\frac{1}{3})$$

البؤرتان

$$V_1(0, a) \quad V_1(0, \frac{2}{3})$$

$$V_2(0, -a) \quad V_2(0, -\frac{2}{3})$$

الرؤس

$$M_1(0, b) \quad B_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

$$M_2(0, -b) \quad B_2(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

«القطبان»

$$\frac{4}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right) = 2a = \text{طول المحور الكبير وحدة}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2b = \text{طول المحور الصغير وحدة}$$

$$x = 0 \leftarrow \text{معادلة المحور الكبير}$$

$$y = 0 \leftarrow \text{معادلة المحور الصغير}$$

$$A = a \cdot b\pi = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \pi = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi \text{ وحدة مربعة}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{3}}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{7}{18}} \pi \text{ وحدة}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال 3

عين البؤرتان والرؤس والقطبان والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي للقطع $9x^2 + 13y^2 = 117$

$$9x^2 + 13y^2 = 117 \rightarrow \div 117 \text{ (ملاحظة ثانياً)}$$

$$\frac{9x^2}{117} + \frac{13y^2}{117} = \frac{117}{117} \Rightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13} \text{ (سينات)}$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13 - 9}$$

$$c = \sqrt{4} \Rightarrow c = 2$$

$$F_1(c, 0) \rightarrow F_1(2, 0)$$

$$F_2(-c, 0) \rightarrow F_2(-2, 0) \text{ البؤرتان}$$

$$V_1(a, 0) \rightarrow V_1(\sqrt{13}, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \rightarrow V_2(-\sqrt{13}, 0) \text{ الرؤس}$$

$$M_1(0, b) \rightarrow M_1(0, 3)$$

$$M_2(0, -b) \rightarrow M_2(0, -3) \text{ «القطبان»}$$

$$2\sqrt{13} = 2(\sqrt{13}) = 2a = \text{طول المحور الكبير وحدة}$$

$$6 = 2(3) = 2b = \text{طول المحور الصغير وحدة}$$

$$y = 0 \text{ معادلة المحور الكبير}$$

$$x = 0 \text{ معادلة المحور الصغير}$$

* المركز $O(0, 0)$ نقطة الأصل

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ الاختلاف المركزي}$$

أولاً: الأسئلة الأساسية: وهي الأسئلة التي يعطي فيها البؤرة أو الرأس أو القطب مباشرة أو يعطي طول المحور الصغير أو البعد بين البؤرتين ... الخ.

$$b = \sqrt{11} \Rightarrow b^2 = 11$$

القطع على محور السينات لأن البؤرة على محور السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

مثال 3 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمسافة بين البؤرتين (8) وحدات ونصف طول محوره الصغير يساوي (3) وحدات.

$$2c = \text{المسافة بين البؤرتين} \\ [2c = 8] \div 2 \\ c = 4$$

$$\frac{1}{2} (2b) = 3 \Rightarrow b = 3$$

نصف محوره الصغير

وجد a من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة

الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

أو

مثال 1 جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتاه $F_2 (-3, 0)$, $F_1 (3, 0)$ ورأساه

النقطتان $V_2 (-5, 0)$, $V_1 (5, 0)$

(السينات) $c = 3 \rightarrow (c)$ (البؤرة)

(السينات) $a = 5 \rightarrow (a)$ (الرأس)

وجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 2 جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتاه $(-5, 0)$, $(5, 0)$ وطول محوره

الكبير = 12 وحدة.

(السينات) $c = 5 \rightarrow (c)$ (البؤرة)

$$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$$

وجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(6)^2 - (5)^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 25}$$

مثال 4

جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرته $(0, \pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$

(الصادات) $c = 2 \rightarrow (c)$ البؤرة

ملاحظة

$x = 4$ تُعتبر (b) قطب لأن البؤرة على محور الصادات والذي يعاكس البؤرة هو القطب لذلك $(b = 4)$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (2)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$$

$$\text{معادلة الصادات} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$$

موقع طلاب العراق

WWW.IQ-RES.COM

@IQRES

موقع طلاب العراق

مثال 6 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات.

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

القطع المكافئ: دائياً نجد P من معادلة القطع المكافئ.

$$y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px$$

$$[4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

$$F(3, 0)$$

بؤرة القطع المكافئ	هي	إحدى بؤرتيه
P	=	C
مكافئ		ناقص

$$c = 3, \quad b = 5, \quad a = ?$$

من القانون العام نجد a

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (5)^2 + (3)^2$$

$$a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$$

بؤرتا القطع الناقص على محور السينات لأن بؤرة القطع المكافئ على السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

مثال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والاختلاف المركزي $(\frac{1}{2})$ وطول محوره الصغير (12) وحدة.

$$2b = 12 \Rightarrow b = 6$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2c)^2 = (6)^2 + c^2 \Rightarrow 4c^2 = 36 + c^2$$

$$4c^2 - c^2 = 36$$

$$[3c^2 = 36] \div 3$$

$$c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$a = 2c \Rightarrow a = 2(2\sqrt{3})$$

$$a = 4\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 48$$

لم يتم تحديد موقع البؤرة ولها احتمالين:

أولاً: على محور السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$$

ثانياً: على محور الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$$

مثال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات وبمس دليل القطع المكافئ $(y^2 = 12x)$.

نقطة التقاطع مع محور الصادات $x = 0$

$$x^2 + y^2 - 3x = 16$$

$$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

$$F_1(0, 4) \quad F_2(0, -4) \rightarrow c = 4 \text{ (صادات)}$$

استفد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$$

$$P = 3 \text{ (سينات)}$$

كلمة يمس يعني أما a أو b

وهنا $(\frac{P}{b} = \frac{b}{c})$ لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو (b)

$$b = 3$$

نجد a من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

مثال 7 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $(x^2 = 24y)$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$$x^2 = 24y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$$

$$P = 6 \Rightarrow F(0, 6)$$

بؤرة القطع المكافئ	هي	إحدى بؤرتيه
$\frac{P}{\text{مكافئ}}$	=	$\frac{c}{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 6$

$$[2a + 2b = 36] \div 2 \leftarrow \text{مجموع طولي محوريه}$$

$$a + b = 18 \Rightarrow b = 18 - a \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (18 - a)^2 + (6)^2$$

مربع حدانية

$$a^2 = 324 - 36a + a^2 + 36 \Rightarrow [36a = 360] \div 36$$

$$a = 10$$

نعوض a في المعادلة (1)

$$b = 18 - a$$

$$b = 18 - 10 \Rightarrow b = 8$$

بؤرة الناقص على محور الصادات لذلك القطع على محور الصادات.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

يقطع القطع عند النقطة $x = -2$ نُعوضه
قيمة x في معادلة القطع المكافئ

$$y^2 + 8(-2) = 0 \Rightarrow y^2 = 16 \quad \text{بالجذر}$$

$$y = \pm 4$$

$$(-2, 4), \quad (-2, -4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نعوض إحدى النقطتين ولتكن $(-2, 4)$

$$\frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

ونعوض أيضاً $a = 2b$

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1}$$

$$b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17}$$

$$a = 2b \Rightarrow a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$$

جد معادلة القطع الناقص الذي
مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور
السينات والمسافة بينهما (6) وحدات
والفرق بين طولي محوريه (2).

$$[2c = 6] \div \Rightarrow c = 3$$

$$[2a - 2b = 2] \div 2 \Rightarrow a - b = 1$$

$$a = 1 + b \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(1 + b)^2 = b^2 + 3^2$$

$$1 + 2b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 2b = 9 - 1$$

$$[2b = 8] \div 2$$

$b = 4$ (نعوض في معادلة رقم (1))

$$a = 1 + b$$

$$a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة
الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول
محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ
($y^2 + 8x = 0$) عند النقطة التي احداثيها
السيني (-2).

$$[2a = 2(2b)] \div 2$$

ضعف محوره الصغير = محوره الكبير

$$a = 2b \dots\dots\dots (1)$$

ملاحظة ومثال

إذا أعطى في السؤال نقطة (x, y) شرط لا تحوي احداثي صفر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

لنعوض النقطة (x, y) ونكون معادلة.

$$12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$$

جمع

$$15b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$$

$$0 = b^4 + 4b^2 - 15b^2 - 12$$

طرح

$$b^4 - 11b^2 - 12 = 0$$

$$(b^2 + 1)(b^2 - 12) = 0$$

$$b^2 + 1 = 0 \quad \text{بُهل} \quad \notin \mathbb{R}$$

$$b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 12$$

نعوض في معادلة (2)

$$a^2 = b^2 + 4 \quad \dots\dots (2)$$

$$a^2 = 12 + 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

مثال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة

القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$

علماً أن القطع الناقص يمر بالنقطة

$$(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

* نستفيد من معادلة المكافئ لنجد P

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$$

$$F(-2, 0)$$

بؤرة القطع المكافئ

هي

إحدى بؤرتيه

P
مكافئ

=

C
ناقص

$$c = 2$$

أنظر إلى النقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ نستفيد

من معادلة القطع الناقص القياسية.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

$$\left[\frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$12b^2 + 3a^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 4 \quad \dots\dots (2)$$

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1)

$$12b^2 + 3(b^2 + 4) = (b^2 + 4) \cdot b^2$$

ملاحظة ومثال إذا طلب في السؤال معادلة القطع الناقص وأعطى نقطتين $P_1(x, y)$ $P_2(x, y)$ نستفيد مباشرة من المعادلة القياسية.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ أو } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ حسب موقع البؤرة ونحوض النقطتين مرتين.}$$

نجد (2) أو (3)

$$36b^2 + 64a^2 = 4a^2b^2$$

$$\pm 36b^2 \pm 4a^2 = \pm a^2b^2$$

$$[60a^2 = 3a^2b^2] \div a^2 \quad a^2 \neq 0$$

$$[60 = 3b^2] \div 3 \Rightarrow b^2 = 20$$

نعوض في معادلة (1)

$$9b^2 + 16a^2 = a^2b^2$$

$$9(20) + 16a^2 = a^2(20)$$

$$180 + 16a^2 = 20a^2$$

$$180 = 20a^2 - 16a^2 \Rightarrow [180 = 4a^2] \div 4$$

$$a^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$$

تابعونا على التليكرام
@iQRES



مثال 12 جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويهر بالنقطتين (3, 4) , (6, 2).

$$\frac{(3)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \quad \begin{matrix} \text{البؤرة على محور} \\ \text{السينات} \end{matrix}$$

$$\left[\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$9b^2 + 16a^2 = a^2b^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{(6)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1 \quad \begin{matrix} (x, y) \\ \text{ونعوض (6, 2)} \end{matrix}$$

$$\left[\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$36b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \dots\dots\dots (2)$$

نضرب المعادلة (1) في 4 لنساوي معامل b^2 ونحل بالحذف (الطرح)

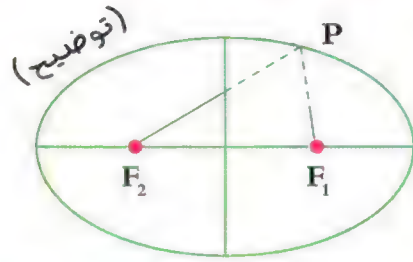
$$36b^2 + 64a^2 = 4a^2b^2 \dots\dots\dots (3)$$

ملاحظة ومثال

إذا أعطى المحيط بين النقاط $QF_1 F_2$ أي المحيط للمثلث الممتكون من البؤرتين F_1, F_2 ونقطة ثالثة على القطع يكون الحل كما يلي:

$$QF_1 F_2 = \frac{QF_1 + F_2}{2a} + \frac{F_1 F_2}{2c} \Rightarrow 2a + 2c = (\text{المحيط})$$

ونكون معادلة رقم (1) ونكمل الحل ← تابع المثال التالي:



$$PF_1 + PF_2 + F_1 F_2 = 16$$

$$[2a + 2c = 16] \div 2$$

$$a + c = 8 \Rightarrow c = 8 - a \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 = 16x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$$

$$2b = 2P$$

طول
المحور الصغير

البعد بين بؤرة
ودليل القطع المكافئ

$$b = P \Rightarrow b = 4 \text{ للناقص}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (8 - a)^2$$

$$a^2 = 16 + 64 - 16a + a^2$$

$$[16a = 80] \div 16 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

جد معادلة القطع الناقص الذي

مثال 13

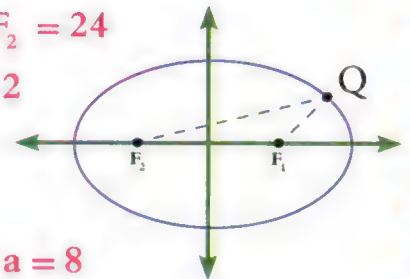
بؤرتيه $F_1 (4, 0)$, $F_2 (-4, 0)$ والنقطة تنتمي للقطع الناقص Q بحيث ان محيط المثلث $QF_1 F_2$ يساوي (24) وحدة.

$$QF_1 + QF_2 + F_1 F_2 = 24$$

$$[2a + 2c = 24] \div 2$$

$$a + c = 12$$

$$a + 4 = 12 \Rightarrow a = 8$$



نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{64 - 16}$$

$$b = \sqrt{48} \Rightarrow b^2 = 48$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

قطع ناقص فيه النقطة P تنتمي

مثال 14

للقطع بحيث ان محيط المثلث $PF_1 F_2$ يساوي (16) وحدة جد معادلة القطع الناقص إذا علمت أن طول محوره الصغير يساوي البعد بين بؤرتيه ودليل القطع المكافئ $y^2 = 16x$ علمت ان القطع على محور السينات (إضافي).

إذا قال في السؤال ان القطع الناقص يقطع من محور (جزءاً) طوله ()
فان هذا الجزء المقطوع إما $2a$ أو $2b$ تابع المثال التالي:

$2a$ ← الجزء الأكبر
 $2b$ ← الجزء الأصغر

ملاحظة ومثال

جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات
ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة. ثم جد المسافة بين البؤرتين والمساحة
والمحيط.

مثال 15

$2b = 8$ الأصغر $b = 4$

$2a = 12$ الأكبر $a = 6$ (صادات)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 4} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

$$2 \times 2\sqrt{5} = 2c \text{ المسافة بين البؤرتين}$$

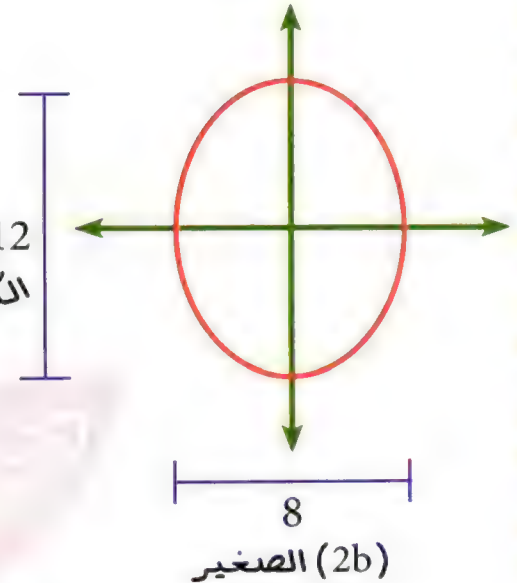
$$4\sqrt{5} = \text{وحدة طول}$$

$$A = a \cdot b\pi$$

$$A = (6)(4)\pi \Rightarrow A = 24\pi \text{ unit}^2$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{36 + 16}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{52}{2}} = 2\pi \sqrt{26} \text{ unit}$$



عندما يعطي في السؤال بعدي إحدى البؤرتين عن الرأسين بشكل عددين فإن الحل يكون:

ملاحظة ومثال

$$\left[\begin{array}{l} 2a = \text{مجموع البعدين} \\ 2c = \text{حاصل طرح البعدين} \end{array} \right]$$

من القانون العام نجد (b) ثم معادلة القطع الناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5, 1 على الترتيب.

16 مثال

مجموع البعدين

$$2a = 5 + 1 \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

حاصل طرح البعدين $a = 3$

$$2c = 5 - 1 \Rightarrow [2c = 4] \div 2$$

$$c = 2$$

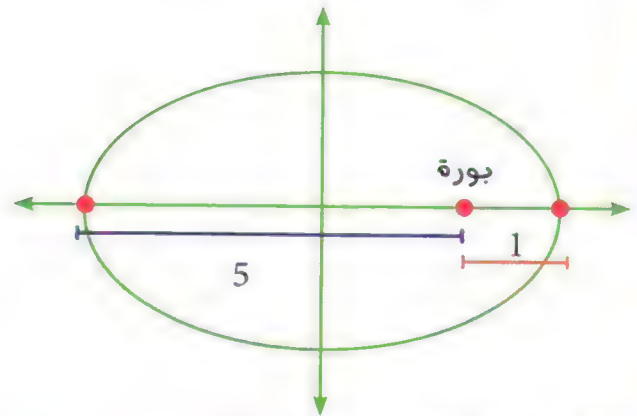
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة لذلك نأخذ احتمالين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{السينات}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{الصادات}$$



((الرسم افتراضي))
من الممكن رسمه على محور الصادات

ربما يتسائل الطالب الملاحظة تقول ((إذا أعطى بعدي إحدى البؤرتين عن الرأسين)) والسؤال أعطى بعد إحدى البؤرتين عن نهايتي محوره الكبير!

لذلك:

((نفس المعنى كلا التعبيرين))



ملاحظة ومثال

إذا أعطى السؤال معادلة قطع تحتوي على ثابت مجهول $h, k \in \mathbb{R}$ مثلاً:

أولاً: إذا كانت المعادلة تحتوي مجهول واحد فقط نستفاد من معادلة القطع لنجد a^2 أو b^2 ونستخدم القانون العام $a^2 = b^2 + c^2 \leftarrow$ تابع الأمثلة الآتية:

$\therefore c = \sqrt{3}$ ((لناقص))

$[4x^2 + hy^2 = h] \div h$

$\frac{x^2}{\frac{h}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1$

القطع على محور السينات من بؤرة القطع المكافئ $(\sqrt{3}, 0)$ لذلك

$\frac{h}{4} = a^2, 1 = b^2, c = \sqrt{3}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{h}{4} = 1 + (\sqrt{3})^2$

$\frac{h}{4} = 1 + 3 \Rightarrow \frac{h}{4} = \frac{4}{1}$

$h = 16$

مثال 17 لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ جد قيمة $k \in \mathbb{R}$.

$[kx^2 + 4y^2 = 36] \div 36$

$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$

لأن البؤرة على محور السينات

إذن $c = \sqrt{3}, b^2 = 9, \frac{36}{k} = a^2 \leftarrow$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{36}{k} = 9 + (\sqrt{3})^2$

$\frac{36}{k} = 9 + 3 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow k = 3$

مثال 18 قطع ناقص معادلته $4x^2 + hy^2 - h = 0$ إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $h \in \mathbb{R}$ ((سؤال إضافي)).

من معادلة القطع المكافئ نجد P

$y^2 = 4\sqrt{3}x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4\sqrt{3}] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$

$F(\sqrt{3}, 0)$

زوروا موقعنا للمزيد

WWW.IQ-RES.COM



ثانياً: إذا كانت المعادلة تحتوي مجهولين فلا نستفيد منها بشيء، فقط نجعلها بالشكل القياسي بعد اتمام السؤال وبالمقارنة مع المعادلة التي سوف نستخرجها نجد المجهولين
← تابع المثال التالي:

مثال 19

قطر ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طوليه محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$. $h, k \in \mathbb{R}$ جد قيمة

$$15 - b^2 = b^2 + 3$$

$$15 - 3 = b^2 + b^2 \Rightarrow [12 = 2b^2] \div 2$$

نعوض في معادلة (1) $b^2 = 6$

$$a^2 = 15 - b^2$$

$$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$$

الآن نجد معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

بعد ذلك نجعل معادلة المجهولين بالشكل القياسي ثم نقارنها

$$\left[\frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = \frac{36}{36} \right] \div 36$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة}} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow h = 4$$

$$\frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow k = 6$$

لأن معادلة القطع الناقص تحتوي مجهولين لا نستفيد منها لذلك من معلومات السؤال نجد معادلة القطع الناقص.

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4\sqrt{3}] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$$

$$F(\sqrt{3}, 0)$$

$$P = c \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

مكافئ ناقص

$$\begin{array}{c} \text{مربعي} \\ (2a)^2 + (2b)^2 = 60 \\ \downarrow \\ \text{مجموع} \\ \text{طولي محوريه} \end{array}$$

$$[4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4$$

$$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 = 15 - b^2 \dots\dots (1)$$

$$\xrightarrow{\text{نعويض}} a^2 = b^2 + c^2$$

$$15 - b^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2$$

باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم:

a - بؤرتاه النقطتان $(0, \pm 2)$ ورأساه $(0, \pm 3)$ ومركزه نقطة الأصل.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a \quad \text{القانون}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+0)^2 + (y+2)^2} = 6 \quad \text{التعويض}$$

(تحويل الجذر للطرف الاخر)

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$[12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 36 + 8y] \div 4$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 9 + 2y \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$$

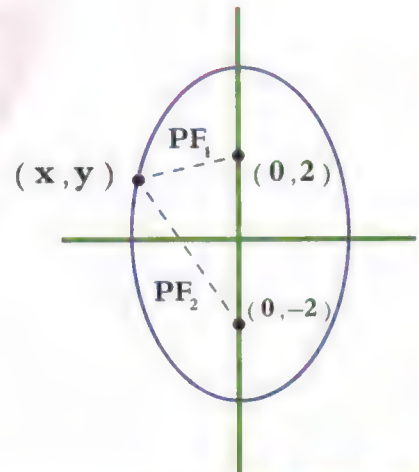
$$9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36$$

$$[9x^2 + 5y^2 = 45] \div 45$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

معادلة القطع الناقص



توضيح

$$a = 3 \Rightarrow 2a = 6$$

$$P(x, y) \begin{cases} \xrightarrow{PF_1} F_1(0, 2) \\ \xrightarrow{PF_2} F_2(0, -2) \end{cases}$$

تابعونا على التليكرام

@iQRES



b- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان المسافة بين بؤرتيه 6 وحدات والعدد الثابت = 10 والبؤرتان تقعان على محور السينات .:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a \quad \text{القانون}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 10 \quad \text{التعويض}$$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$$

$$[20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 100 + 12x] \div 4 \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

$$5\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 150x + 225 + 25y^2 = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 9x^2 = 625 - 225$$

$$[16x^2 + 25y^2 = 400] \div 400$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

معادلة القطع الناقص

توضيح

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{العدد الثابت} \quad 2a = 10$$

$$P(x, y) \begin{cases} F_1 (3, 0) \\ F_2 (-3, 0) \end{cases}$$

$x_1 \ y_1$
 $x_2 \ y_2$

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الناقص والربط بين القطعين المكافئ والناقص

$$\left[\frac{25}{16} b^2 = b^2 + 9 \right] \cdot 16$$

$$25 b^2 = 16 b^2 + 144$$

$$25 b^2 - 16 b^2 = 144$$

$$\left[9 b^2 = 144 \right] \div 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a = \frac{5}{4} b \quad \text{نحوض في معادلة (1)}$$

$$a = \frac{5}{4} (4) \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 2 جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي (16) وحدة.

2002 - د (1)

$$\left[2 c = 8 \right] \div 2 \Rightarrow c = 4 \quad ((\text{سينات}))$$

$$\left[2 a + 2 b = 16 \right] \div 2 \Rightarrow a + b = 8$$

$$a = 8 - b \dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

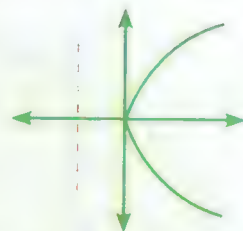
$$(8 - b)^2 = b^2 + (4)^2$$

$$64 - 16 b + b^2 = b^2 + 16$$

$$16 b = 64 - 16$$

سؤال 1 النقطة $\left(\frac{1}{3}, 2 \right)$ تنتهي الى

القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتهي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه $\left(\frac{5}{4} \right)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.



1995 - د (2)

القطع المكافئ:

الفتحة نحو اليمين لأن النقطة في الربع الأول والبؤرة على محور السينات.

$$y^2 = 4 P x$$

$$(2)^2 = 4 P \left(\frac{1}{3} \right) \Rightarrow 4 = \frac{4 P}{3} \Rightarrow P = 3$$

$$y^2 = 4 (3) x \Rightarrow y^2 = 12 x$$

القطع الناقص:

$$P = C$$

مكافئ ناقص

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow [4a = 5b] \div 4$$

$$a = \frac{5}{4} b \dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{5}{4} b \right)^2 = b^2 + (3)^2$$

نستفيد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$$x^2 = 24y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$$

$$P = 6 \Rightarrow F(0, 6)$$

بؤرة المكافئ إحدى بؤرتي الناقص أي أن
على محور الصادات $c = 6$

$$2a - 2b = 4 \quad \text{الفرق بين طولي محوريه}$$

$$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2 + b)^2 = b^2 + (6)^2$$

$$4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$$

$$4b = 36 - 4 \Rightarrow [4b = 32] \div 4$$

$$b = 8 \quad \text{تعويض}$$

$$a = 2 + b$$

$$a = 2 + 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

سؤال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي
مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات
والهسافة بين بؤرتيه تساوي (12) وحدة والفرق
بين طولي محوريه يساوي (4) وحدات طول .

$$[2c = 12] \div 2 \Rightarrow c = 6$$

2006
تمهيدي

$$[2a - 2b = 4] \div 2$$

$$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b \dots\dots\dots (1)$$

$$[16b = 48] \div 16 \Rightarrow b = 3$$

$$a = 8 - b \Rightarrow a = 8 - 3$$

$$a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

سؤال 3 قطع ناقص معادلته
 $x^2 + 4y^2 = 4$ جد طول محوريه واحداثي
راسيه وبؤريته .

$$[x^2 + 4y^2 = 4] \div 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

2003 - د (1)

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{4 - 1} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

طول المحور الكبير $4 = 2 \times 2 = (2a)$ وحدة

طول المحور الصغير $2 = 2 \times 1 = (2b)$ وحدة

الراسات $V_1(a, 0), V_2(-a, 0)$

$V_1(2, 0), V_2(-2, 0)$

البؤرتان $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$

$F_1(\sqrt{3}, 0), F_2(-\sqrt{3}, 0)$

سؤال 4 جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وإحدى

بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$x^2 = 24y$ والفرق بين طولي

محوريه ليساوي (4) وحدات .

2004 - د (1)

2015 - د (2)

خارج القطر

$$\therefore c=3$$

$$[2b=10] \div 2 \Rightarrow b=5$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9$$

$$a^2 = 34$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

سؤال 7 جد معادلة القطع الناقص الناقص

الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرته القطع المكافئ $y^2 = -8x$ وطول محوره الكبير ثلاث امثال طول محوره الصغير.

$$y^2 = -8x$$

2010
تمهيد

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P=8] \div 4 \Rightarrow P=2$$

$$F(-2,0) \quad ((\text{سينات}))$$

$$[2a=3(2b)] \div 2$$

$$a=3b \dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(3b)^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 9b^2 = b^2 + 4$$

$$9b^2 - b^2 = 4 \Rightarrow [8b^2 = 4] \div 8$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a=3b \Rightarrow a = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2+b)^2 = b^2 + (6)^2$$

$$4+4b+b^2 = b^2 + 36$$

$$4b = 36 - 4 \Rightarrow [4b = 32] \div 4$$

$$b = 8$$

$$a = 2 + b$$

$$a = 2 + 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

سؤال 6 لتكن $y^2 + 12x = 0$, $y^2 - 12x = 0$

معادلتين قطعيتين مكافئتين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤراته هما بؤرتي القطعتين المكافئتين وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات طول.

2005 - د (2)

القطع المكافئ:

$$y^2 - 12x = 0$$

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P=12] \div 4 \Rightarrow P=3$$

البؤرة $F(3,0)$

معادلة الدليل $x = -3$

$$y^2 + 12x = 0$$

$$y^2 = -12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P=12] \div 4 \Rightarrow P=3$$

البؤرة $F(-3,0)$

معادلة الدليل $x = +3$

القطع الناقص:

$$c^2 = P^2$$

بؤراته هما $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$

سؤال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره على المحورين الاجداثيين ويبر من بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص 20π وحدة مساحة.

$$y^2 = 16x \quad (2010 - د 1)$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$$

البؤرة $F(4, 0)$

القطع الناقص:

أما
 $a = 4$
أو
 $b = 4$
يبر من بؤرة المكافئ $F(4, 0)$

$$A = ab\pi$$

$$20\pi = a \cdot b \pi \Rightarrow 20 = a \cdot b \quad (1)$$

يوجد لدينا احتمالين:

الأول: $a = 4$ نعوض بمعادلة (1)

$$[20 = 4b] \div 4 \Rightarrow b = 5$$

هذا الاحتمال يُهمل لأن فيه a اصغر من b وهذا لا يمكن في القطع الناقص.

الثاني: $b = 4$

$$[20 = 4a] \div 4 \Rightarrow a = 5$$

هذا الاحتمال صح لأن a أكبر من b .

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

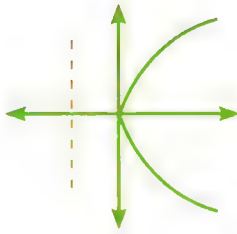
ملاحظة

القطع على محور الصادات لأن البؤرة $F(4, 0)$ التي مر بها القطع أصبحت b أي انها قطب وبها ان القطب سيني فالقطع صادي لأن البؤرة عكس القطب.

سؤال 9 قطع ناقص رأساه $(\pm 5, 0)$ وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والمار دليله بالنقطة $(-3, 4)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

2012

خارج القطر



القطع المكافئ:

القطعان على محور السينات.

$$y^2 = 4Px \quad P = 3$$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$

القطع الناقص:

بؤرة القطع المكافئ والتي هي $F(3, 0) \rightarrow$ إحدى بؤرتي الناقص رأساه $(\pm 5, 0)$

$$c = 3 \quad a = 5 \quad b = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومساحة منطقتة 24π وحدة مساحة.

2012 - د (2)

الجزء المقطوع من محور السينات

أما $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

أو $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$A = a \cdot b\pi$

$24\pi = a \cdot b\pi \Rightarrow a \cdot b = 24$

نعوض أولاً $a = 4$

$[4b = 24] \div 4 \Rightarrow b = 6$ يُهمل

لأن $b < a$ أصغر

ثم نعوض $b = 4$

$[4a = 24] \div 4 \Rightarrow a = 6$ o.k

$a > b$ أكبر

$a = 6, b = 4$

القطع على محور الصادات لأن الجزء المقطوع منه محور السينات اصبح يمثل (2b) أي محور القطب.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

سؤال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طولي محوريه 2 : 1 ويقطع القطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

2013

خارج القطر

$y^2 = 8x$

بالجذر $y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16$

$y = \pm 4$ (2, 4) , (2, -4)

$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \dots\dots (1)$

لأن لدينا (x, y) نستفيد من معادلة القطع الناقص القياس بـ.

نعوض (2, 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{(2)^2}{(2b)^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1$

$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow b^2 = 17$

$b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2b$

$a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$



سؤال 13

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 16y = 0$ وطول محوره الكبير $= 12$ وحدة.

$$x^2 - 16y = 0 \Rightarrow x^2 = 16y \quad \text{تمهيد 2016}$$

$$x^2 = 4Py$$

$$[4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4 \quad F(0, 4)$$

للقطع الناقص $c = 4$

$$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{6^2 - 4^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$$

$$b^2 = 20$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

سؤال 12

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (8) وحدات.

$$[2b = 8] \div 2 \Rightarrow b = 4$$

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$$

$$P = 3 \rightarrow F(3, 0)$$

بؤرة القطع المكافئ	هي	إحدى بؤرتيه
P	$=$	c
مكافئ		ناقص
		$c = 3$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (3)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 13

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات ومساحته (32π) وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$.

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \dots \dots (1) \quad \text{تمهيد 2015 د (2)}$$

نعوض معادلة (1) هنا $A = a \cdot b\pi$

$$32\pi = a \cdot b\pi$$

$$32 = (2b)(b) \Rightarrow [2b^2 = 32] \div 2$$

$$b^2 = 16$$

بالجذر

$$b = 4 \quad \text{نعوض معادلة (1)}$$

$$a = 2(b) = 2(4) \Rightarrow a = 8$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$

سؤال 15 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساوياً لبعده بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ عن دليله إذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi \text{ cm}^2$.

أما $a^2 + 64 = 0 \notin \mathbb{R}$

أو $a^2 - 100 = 0 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$b = \frac{80}{a} = \frac{80}{10} \Rightarrow b = 8$

لم يحدد بؤرة القطع

انتبه! على الرغم ان القطع المكافئ على محور السينات إلا ان لم يحدد موقع البؤرة وانما اطوال فقط.

فقال $2c = 2P$ وهذا لا يعني انها يقعان على نفس المحور.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

سؤال 16 إذا كان $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0, d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e + di\|$

2014 نازحين

$e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$e + id = \frac{4+4i+2i-2}{(1)^1 + (1)^2} = \frac{2+6i}{2}$

2016 نازحين

سؤال 15 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساوياً لبعده بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ عن دليله إذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi \text{ cm}^2$.

2016 - د (1)

$y^2 = -24x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 24] \div 4$

$P = 6$

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله $2P =$

$2c = 2P$ بعد البؤري مساوياً لبعده بؤرة القطع المكافئ عن دليله

$\therefore c = P \Rightarrow c = 6$ (للقص)

$A = a \cdot b\pi$

$80\pi = a \cdot b\pi \Rightarrow b = \frac{80}{a} \dots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = \left(\frac{80}{a}\right)^2 + (6)^2$

$\left[a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36\right] \cdot a^2$

$a^4 = 6400 + 36a^2$

$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$

$(a^2 + 64)(a^2 - 100) = 0$

سؤال 17

قطر ناقص معادلته

$4x^2 + 2y^2 = k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمه k .

$$[4x^2 + 2y^2 = k] \div k \quad (2008 - د (1))$$

$$\frac{4x^2}{k} + \frac{2y^2}{k} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1$$

$$[2c = 2\sqrt{3}] \div 2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

أكبر من $\frac{k}{4}$ (كلها صغر المقام كبر الكسر))

«القطر صادي» لأن الكبير $\frac{k}{2}$ يقح على محور (y)

$$a^2 = \frac{k}{2}, b^2 = \frac{k}{4}, c = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + (\sqrt{3})^2$$

$$[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3] \cdot 4$$

$$2k = k + 12$$

$$2k - k = 12 \Rightarrow k = 12$$

$$e + di = 1 + 3i \Rightarrow e = 1$$

$$d = 3$$

أحدى بؤرتي القطر الناقص $(0, d) = (0, 3)$

$$r = |le + dill| = \sqrt{e^2 + d^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

$$2a = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = 10$$

$$c = 3, a = \sqrt{10}, b = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{10 - 9} = \sqrt{1}$$

$$b = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1$$





سؤال 18

إذا كان $ky^2 + 3x^2 = z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتهيات الى محور السينات ويبر بنقطة تقاطع المستقيم $8x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علماً ان مساحة القطع $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد $k, z \in \mathbb{R}$.

$2x + y = \sqrt{3}$ $x = 0$ ((نقطة التقاطع مع محور الصادات))

2010 - د (2)

$2(0) + y = \sqrt{3}$

هذه النقطة تمثل القطب لانها على محور $y \rightarrow (0, \sqrt{3})$ $y = \sqrt{3}$

والبؤرة على محور X اي ان $b = \sqrt{3}$

$A = a \cdot b\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi = a(\sqrt{3})\pi \Rightarrow a = 2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$[ky^2 + 3x^2 = z] \div z \Rightarrow \left(\frac{3x^2}{z}\right) + \left(\frac{ky^2}{z}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{z}{3}} + \frac{y^2}{\frac{z}{k}} = 1$
 $a^2 = \frac{z}{3}$ $b^2 = \frac{z}{k}$

$\frac{z}{3} = a^2 \Rightarrow \frac{z}{3} = 4 \Rightarrow z = 12$

$\frac{z}{k} = b^2 \Rightarrow \frac{12}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{12}{3} \Rightarrow k = 4$

Notes:



انسحاب المحاور للقطع الناقص

المعادلة بالشكل القياسي لا تحتاج ترتيب

الانسحاب

المعادلة ليست بالشكل تحتاج إلى ترتيب

إذا أعطى معادلة بالشكل القياسي (لا تحتاج ترتيب)

أولاً

معادلة المحور الكبير $y = k$

معادلة المحور الصغير $x = h$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{على محور السينات}$$

معادلة المحور الكبير $x = h$

معادلة المحور الصغير $y = k$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{على محور الصادات}$$

ملاحظات

أولاً: نجد h, k ونمثل إحداثي المركز $O(h, k)$ مع قوس x و k مع قوس y نأخذها بعكس الإشارة.

ثانياً: نجد a^2, b^2 من المعادلة القياسية ثم نجد c باستخدام القانون العام أدناه:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ثالثاً: نجد مطالب السؤال.



WWW.IQ-RES.COM



@IQRES

مقالاتنا على انستغرام

موقع طلاب العراق



جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

$$h = +2, \quad k = +1 \Rightarrow o(h, k) \Rightarrow o(2, 1)$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

على محور الصادات

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\bar{F}_1(h, c+k) \Rightarrow \bar{F}_1(2, 4+1) \Rightarrow \bar{F}_1(2, 5)$$

$$\bar{F}_2(h, -c+k) \Rightarrow \bar{F}_2(2, -4+1) \Rightarrow \bar{F}_2(2, -3)$$

البؤرتان

$$\bar{V}_1(h, a+k) \Rightarrow \bar{V}_1(2, 5+1) \Rightarrow \bar{V}_1(2, 6)$$

$$\bar{V}_2(h, -a+k) \Rightarrow \bar{V}_2(2, -5+1) \Rightarrow \bar{V}_2(2, -4)$$

الرأسان

$$\bar{M}_1(b+h, k) \Rightarrow \bar{M}_1(3+2, 1) \Rightarrow \bar{M}_1(5, 1)$$

$$\bar{M}_2(-b+h, k) \Rightarrow \bar{M}_2(-3+2, 1) \Rightarrow \bar{M}_2(-1, 1)$$

القطبان

$$\text{وحدة طول} = 2a = 2(5) = 10 \quad \text{طول المحور الكبير}$$

$$\text{وحدة طول} = 2b = (2)(3) = 6 \quad \text{طول المحور الصغير}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{الاختلاف المركزي}$$

$$x = h \Rightarrow x = 2 \rightarrow \text{معادلة المحور الكبير}$$

$$y = k \Rightarrow y = 1 \rightarrow \text{معادلة المحور الصغير}$$



عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي

$$\frac{(x-4)^2}{81} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

مركز $h=4$, $k=-1 \Rightarrow o(h,k) \Rightarrow o(4,-1)$

$a^2=81 \Rightarrow a=9$

$b^2=25 \Rightarrow b=5$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=\sqrt{4 \times 14}$

$c=2\sqrt{14}$

$\bar{F}_1(c+h,k) \Rightarrow (2\sqrt{14}+4,-1)$

$\bar{F}_2(-c+h,k) \Rightarrow (-2\sqrt{14}+4,-1)$

البؤرتان

$\bar{V}_1(a+h,k) \Rightarrow \bar{V}_1(9+4,-1) \Rightarrow \bar{V}_1(13, -1)$

$\bar{V}_2(-a+h,k) \Rightarrow \bar{V}_2(-9+4,-1) \Rightarrow \bar{V}_2(-5, -1)$

الرأسان

$\bar{M}_1(h,b+k) \Rightarrow \bar{M}_1(4, 5-1) \Rightarrow \bar{M}_1(4, 4)$

$\bar{M}_2(h,-b+k) \Rightarrow \bar{M}_2(4, -5-1) \Rightarrow \bar{M}_2(4, -6)$

القطبان

وحدة طول $= 2a = 2(9) = 18$ طول المحور الكبير

وحدة طول $= 2b = 2(5) = 10$ طول المحور الصغير

$y=k \Rightarrow y=-1$ معادلة المحور الكبير

$x=h \Rightarrow x=4$ معادلة المحور الصغير

إذا أعطى معادلة غير مرتبة بالشكل القياسي (تحتاج إلى ترتيب)

ثانياً

نفتح قوسين ونضع بالأول x وجماعتها وفي القوس الثاني y وجماعتها وبين القوسين نضع +

$$\text{العدد} = (y \text{ وجماعتها}) + (x \text{ وجماعتها})$$

نسحب معامل x^2 ومعامل y^2 عامل مشترك

ثانياً

نضيف $(\text{نصف معامل } x)^2$ للقوس الذي يحوي جماعته x

ثالثاً

ونضيف $(\text{نصف معامل } y)^2$ للقوس الذي يحوي جماعته y

* نضيف $\left(\text{نصف معامل } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2$ بعد ضربها بالعدد الموجود خارج القوس (العامل المشترك) إلى الطرف الثاني الذي يحتوي العدد.

نحلل كل قوس باستخدام طريقة المربع الكامل كالتالي:

رابعاً

$$\left(\boxed{} \pm \boxed{} \right)^2$$

↓
إشارة الوسط

↙ ↘
جذر الأول جذر الأخير

نقسم على العدد الذي في الطرف الثاني لكي تصبح المعادلة قياسية.

خامساً

جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص الذي معادلته

$$9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$$

العدد جهاة y جهاة x

$$(9x^2 - 72x) + (16y^2 - 96y) = -144$$

$$9(x^2 - 8x) + 16(y^2 - 6y) = -144$$

نسحب معامل x^2 و y^2 عامل مشترك

$$9(x^2 - 8x + 16) + 16(y^2 - 6y + 9) = -144 + 144 + 144$$

$$[9(x - 4)^2 + 16(y - 3)^2 = +144] \div 144$$

$$\frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$$

القطع على السينات

$$h = 4, k = 3 \Rightarrow o(h, k) \Rightarrow o(4, 3) \text{ المركز}$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{16 - 9} \Rightarrow \sqrt{7}$$

$$\bar{F}_1(c + h, k) \Rightarrow \bar{F}_1(\sqrt{7} + 4, 3)$$

$$\bar{F}_2(-c + h, k) \Rightarrow \bar{F}_2(-\sqrt{7} + 4, 3)$$

البؤرتان

$$\bar{V}_1(a + h, k) \Rightarrow \bar{V}_1(4 + 4, 3) \Rightarrow \bar{V}_1(8, 3)$$

$$\bar{V}_2(-a + h, k) \Rightarrow \bar{V}_2(-4 + 4, 3) \Rightarrow \bar{V}_2(0, 3)$$

الرأسان

$$\bar{M}_1(h, b + k) \Rightarrow \bar{M}_1(4, 3 + 3) \Rightarrow \bar{M}_1(4, 6)$$

$$\bar{M}_2(h, -b + k) \Rightarrow \bar{M}_2(4, -3 + 3) \Rightarrow \bar{M}_2(4, 0)$$

القطبان

$$\text{وحدة طول } 2a = 2(4) = 8 \text{ طول المحور الكبير}$$

$$\text{وحدة طول } 2b = 2(3) = 6 \text{ طول المحور الصغير}$$

$$y = k \Rightarrow y = 3 \text{ معادلة المحور الكبير}$$

$$x = h \Rightarrow x = 4 \text{ معادلة المحور الصغير}$$

ناقش خصائص القطع التالي :

مثال 4

$$x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$$

$$(x^2 + 4x) + (25y^2 - 150y) = -204$$

$$1(x^2 + 4x) + 25(y^2 - 6y) = -204$$

$$(x^2 + 4 + 4) + 25(y^2 - 6y + 9) = -204 + 4 + 225$$

$$\left[(x+2)^2 + 25(y-3)^2 = 25 \right] \div 25 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

القطع على السينات

$$h = -2, k = 3 \Rightarrow o(h, k) \Rightarrow o(-2, 3) \text{ المركز}$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24}$$

$$c = 2\sqrt{6}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1(c+h, k) &\Rightarrow \bar{F}_1(2\sqrt{6} - 2, 3) \\ \bar{F}_2(-c+h, k) &\Rightarrow \bar{F}_2(-2\sqrt{6} - 2, 3) \end{aligned} \right\} \text{البؤرتان}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_1(a+h, k) &\Rightarrow \bar{V}_1(5-2, 3) \Rightarrow \bar{V}_1(3, 3) \\ \bar{V}_2(-a+h, k) &\Rightarrow \bar{V}_2(-5-2, 3) \Rightarrow \bar{V}_2(-7, 3) \end{aligned} \right\} \text{الرأسان}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1(h, b+k) &\Rightarrow \bar{M}_1(-2, 1+3) \Rightarrow \bar{M}_1(-2, 4) \\ \bar{M}_2(h, -b+k) &\Rightarrow \bar{M}_2(-2, -1+3) \Rightarrow \bar{M}_2(-2, 2) \end{aligned} \right\} \text{القطبان}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ الاختلاف المركزي}$$

مساحة $A = a \cdot b \pi$

وحدة مربعة $A = (5) (1) \pi \Rightarrow A = 5 \pi$ مساحة

محيط $P = 2 \pi \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

محيط $P = 2 \pi \sqrt{\frac{25+1}{2}} \Rightarrow P = 2 \sqrt{13} \pi$

وحدة طول $2a = 2 (5) = 10$ = طول المحور الكبير

وحدة طول $2b = 2 (1) = 2$ = طول المحور الصغير

وحدة طول $2c = 2 (2 \sqrt{6}) = 4 \sqrt{6}$ = المسافة بين بؤرتين

$y = 3$

معادلة المحور الكبير

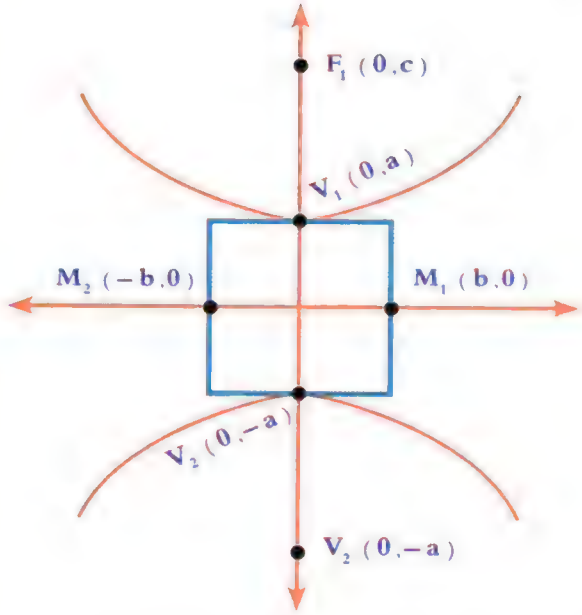
$y = -2$

معادلة المحور الصغير

Notes:

القطع الزائد

تعريف: هو مجموعة من النقط في المستوى التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتتين ((البؤرتان)) يساوي عدداً ثابتاً.



قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات

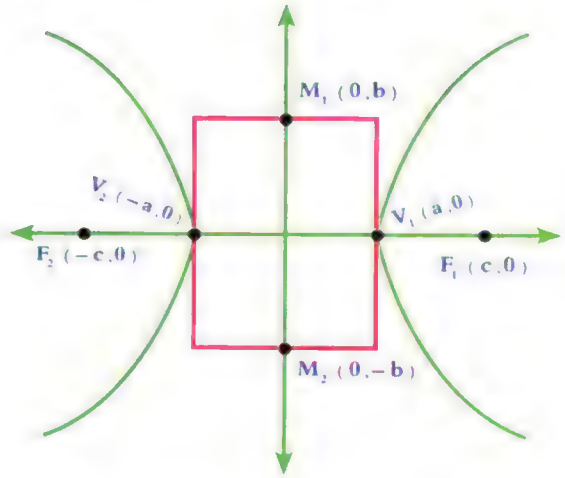
$F_1(0, c)$
 $F_2(0, -c)$ البؤرتان

$V_1(0, a)$
 $V_2(0, -a)$ الرأسان

$M_1(0, b)$
 $M_2(0, -b)$ القطبان

المعادلة القياسية:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



قطع زائد بؤرتاه على محور السينات

$F_1(c, 0)$
 $F_2(-c, 0)$ البؤرتان

$V_1(a, 0)$
 $V_2(-a, 0)$ الرأسان

$M_1(0, b)$
 $M_2(0, -b)$ القطبان

* النقطتان $(0, b) - (0, -b)$ سوف نسميها القطبان فقط للتوضيح لم يطلق عليها اسم اقطاب في النهج.

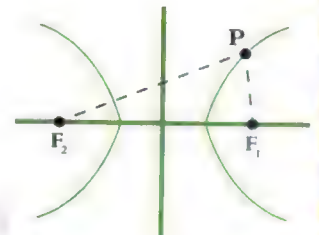
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{المعادلة القياسية:}$$

يسمى نصف القطر البؤري الايمن PF_1

يسمى نصف القطر البؤري الايسر PF_2

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

القيمة المطلقة للفرق بين بعدي اي نقطة عن بؤرتيه $|PF_1 - PF_2|$



ملاحظات

أولاً: مصطلحات القطع الزائد:

$2a$ = طول المحور الحقيقي أو العدد الثابت أو البعد بين الرأسين .

$2b$ = طول المحور المرافق ((التخيلي)) وهو عمودي المحور الحقيقي .

$2c$ = البعد بين البؤرتين .

ثانياً: في القطع الزائد $\begin{pmatrix} a & \text{أكبر } c \\ b & \text{أكبر } c \end{pmatrix}$ دائماً وقد تكون $a = b$ أو a أكبر b أو a أصغر b

ثالثاً: لاحظ المعادلة القياسية:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

↑ ↑
السينات الصادات

دائماً أول رقم يمثل a^2 والثاني (b^2) لا يتغير.

رابعاً: لا يوجد قانون للمساحة والمحيط في القطع الزائد .

خامساً: الاختلاف المركزي (e) أكبر من (1) لذلك ان وجدت اختلاف مركزي أكبر من (1) هذا قطع زائد حتى وان لم يذكر نوع القطع .

سادساً: في القطع الزائد:

(1) كل كلمة يمر $(x, 0)$ أو $(0, y)$ يعني هذا (a)

(2) كل يمر هذه a

(3) كل يقطع عند رقم $x = \pm$ ، رقم $y = \pm$ هذا الرقم هو (a)

سابعاً: القوانين:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c^2 - b^2} \\ b &= \sqrt{c^2 - a^2} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right.$$

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{الاختلاف المركزي}$$



العلاقات بين القطوع

تعلم كيف تحدد العلاقة بين القطوع من خلال الأمثلة التوضيحية الآتية:

(1) لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه // هي بؤرتيه القطع المكافئ

$$P = C$$

مكافئ ناقص

معناها
علامة يساوي
=

(2) لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الزائد الذي رأسه // هما بؤرتا القطع الناقص

$$C = a$$

ناقص زائد

(3) لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنطبقان // على بؤرتي القطع الزائد

$$C = C$$

ناقص زائد

معناها
علامة يساوي
=

(4) لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد قطباه // هو رأس القطع الزائد

$$a = b$$

زائد ناقص

معناها
علامة يساوي
=

(5) عبارة قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر معناها:

* عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها
طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق

$$e = \sqrt{2} \quad \text{وأن} \quad 2a = 2b \Rightarrow a = b$$

$$C = a$$

ناقص زائد

$$C = a$$

ناقص زائد

راجع السؤال الخامس والثامن
عشر في الاسئلة الوزارية



مقارنة بين القطع الناقص والزائد

القطع الناقص	القطع الزائد
أولاً: له مساحة ومحيط فكل سؤال يحوي مساحة ومحيط هذه القطع ناقص	أولاً: لا يوجد له مساحة ومحيط لذلك السؤال الذي فيه مساحة أو محيط ولم يذكر نوع القطع فهو ناقص.
ثانياً: الاختلاف المركزي أصغر من (1)	ثانياً: الاختلاف المركزي أكبر من (1)
ثالثاً: a أكبر من b, c	ثالثاً: c أكبر من b, a
رابعاً: المعادلة القياسية ذات إشارة موجبة	رابعاً: المعادلة القياسية ذات إشارة سالبة
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
خامساً: المصطلحات: طول المحور الكبير = 2a طول المحور الصغير = 2b	خامساً: المصطلحات: طول المحور الحقيقي = 2a طول المحور المرافق = 2b
سادساً: يقطع المحورين عند a, b	سادساً: يقطع محور واحد عند a

www.iq-res.com

أمثلة توضيحية:

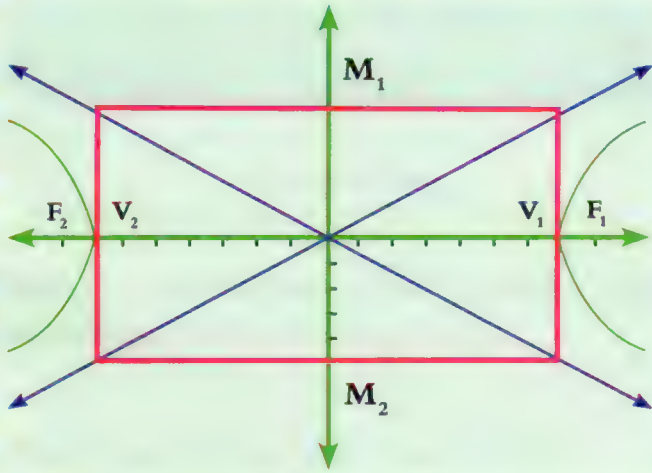
قطع مخروطي مساحته $20\pi \text{ cm}^2$ الخ ← القطع ناقص / فيه مساحة.

قطع مخروطي اختلافه المركزي 1.2 الخ ← القطع زائد / e أكبر من (1).

قطع مخروطي رأسه (5, 0) وإحدى بؤرتيه (3, 0) الخ / القطع ناقص / $a > c$ أكبر

قطع مخروطي رأسه (10, 0) ويبر من (0, 6) الخ / قطع ناقص يقطع المحورين a, b

قطع مخروطي طول محوره الحقيقي 12 وحدة الخ / قطع زائد / من مصطلح محور حقيقي.



مثال
عين البؤرتان والرأسان وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة التالية ثم ارسبها:

$$(1) \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$

$$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 64 + 36 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10$$

$$F_1 (c, 0) \Rightarrow F_1 (10, 0) \quad \text{البؤرتان: 1}$$

$$F_2 (-c, 0) \Rightarrow F_2 (-10, 0)$$

$$\text{الرأسان: 2}$$

$$V_1 (a, 0) \Rightarrow V_1 (8, 0)$$

$$V_2 (-a, 0) \Rightarrow V_2 (-8, 0)$$

$$\text{3 طول المحور الحقيقي } 16 = 2a = \text{وحدة}$$

$$\text{4 طول المحور المرافق } 12 = 2b = \text{وحدة}$$

$$\text{5 الاختلاف المركزي:}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$(2) 12x^2 - 4y^2 = 48$$

$$[12x^2 - 4y^2 = 48] \div 48$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$\text{البؤرتان: 1}$$

$$F_1 (c, 0) \Rightarrow F_1 (4, 0)$$

$$F_2 (-c, 0) \Rightarrow F_2 (-4, 0)$$

$$\text{2 الرأسان:}$$

$$V_1 (a, 0) \Rightarrow V_1 (2, 0)$$

$$V_2 (-a, 0) \Rightarrow V_2 (-2, 0)$$

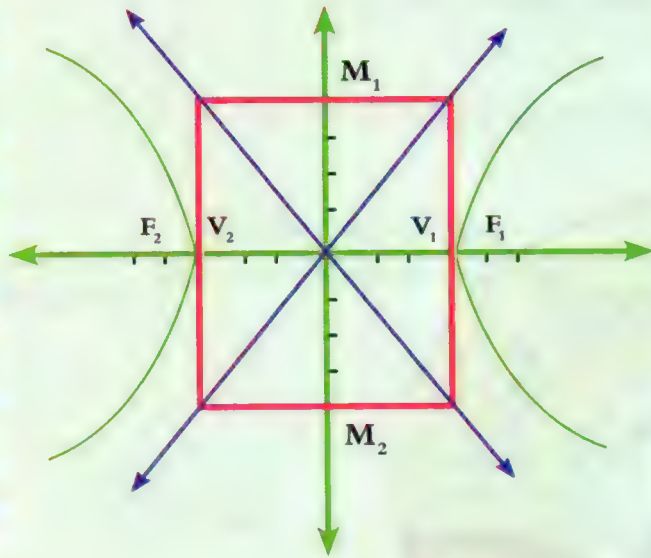
$$\text{3 طول المحور الحقيقي } 4 = 2a = \text{وحدة}$$

$$\text{4 طول المحور المرافق } 4\sqrt{3} = 2b = \text{وحدة}$$

طول المحور الحقيقي \rightarrow وحدة $2a = 2 \times 3 = 6$

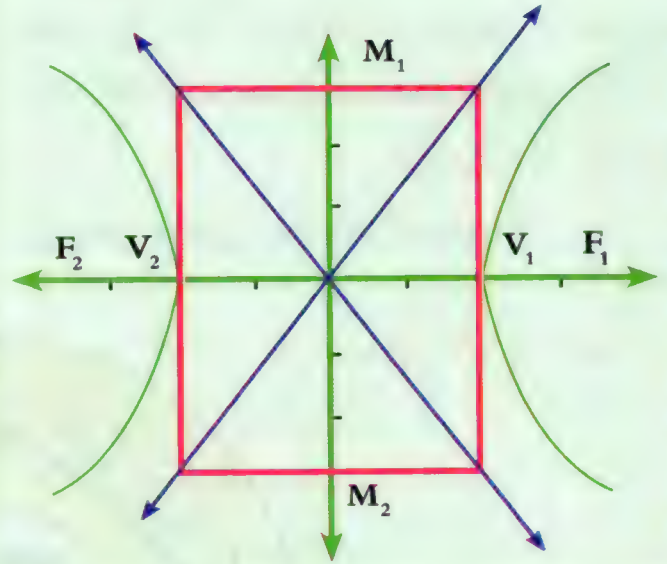
طول المحور المرافق \rightarrow وحدة $2b = 2 \times 4 = 8$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$



الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{4}{2} = 2 > 1$$



$$(3) [16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b$$

$$c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

البؤرتان: 1

$$F_1 (c, 0) \Rightarrow F_1 (5, 0)$$

$$F_2 (-c, 0) \Rightarrow F_2 (-5, 0)$$

الرؤس: 2

$$V_1 (a, 0) \Rightarrow V_1 (3, 0)$$

$$V_2 (-a, 0) \Rightarrow V_2 (-3, 0)$$

طريقة رسم القطع الزائد:

1 نعين الرؤس V_1, V_2

2 نعين النقطتين M_1, M_2

3 هذه النقاط الاربعة تكون مستطيل اضلاعه
توازي المحورين.

4 نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان
المحاذايات.

5 نعين البؤرتين F_1, F_2 ثم نرسم ذراعي
القطع.



أولاً: الاسئلة التي يعطي فيها (البؤرة - الرأس) طول الحورين الحقيقي أو المرافق وهذه لا تحتاج الى معادلات آنية:

مثال 1 جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي (12) وحدة طول وطول محوره المرافق (10) وحدة طول .

$$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$[2b = 10] \div 2 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة

الصادات	السينات
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$	$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

مثال 2 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه $(0, \sqrt{8})$, $(0, -\sqrt{8})$.

$$[2b = 4] \div 2 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c = \sqrt{8} \quad ((\text{صادات}))$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4}$$

$$a = 2$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

مثال 3 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$ ومركزه نقطة الأصل .

$$c = 5 \quad ((\text{سينات}))$$

كل يتقاطع في القطع الزائد هو (a)

$$a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 4 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي (6) وحدات والاختلاف المركزي (2) والبؤرتان على محور السينات .

$$[2a = 6] \div 2 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$2 = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$$b^2 = 27$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$





ثانياً: اسئلة الدرجة الثانية والتي تحتاج الى معادلتين أنياً:

$$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$$

القطع الزائد:

$$[2a = 6] \div 2 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

بؤرة القطع المكافئ	هي	إحدى بؤرتيه
P	=	C
مكافئ		زائد
		c = 5

$$\therefore c = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 5 جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق $(2\sqrt{2})$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3) ومركزه نقطة الأصل وبؤرته على محور الصادات.

$$[2b = 2\sqrt{2}] \div 2 \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \dots\dots(1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{القانون العام}$$

$$(3a)^2 = a^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow [8a^2 = 2] \div 8$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$$

مثال 6 قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبهر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5})$ $(1, -2\sqrt{5})$ جد معادلتين القطعين المكافئ والزائد.

ربع أول ربع رابع

$$(1, 2\sqrt{5}) \quad (1, -2\sqrt{5})$$

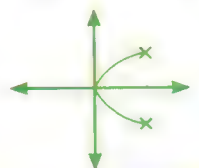
الفتحة يمين

$$y^2 = 4Px$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 4P(1)$$

$$[20 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = 5$$

القطع المكافئ:



زوروا موقعنا للمزيد

WWW.IQ-RES.COM





مثال 7

جد معادلة القطع الزائد الذي
بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
وبمس دلييل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

القطع المكافئ:

$$x^2 + 12y = 0$$

$$x^2 = -12y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 12] \div 4$$

$$P = 3$$

القطع الزائد:

بؤرتي القطع الناقص

هما

بؤرتاه

c
ناقص

=

c
زائد

$$c = 4$$

$$a = P \Rightarrow a = 3$$

كل بمس هو (a)

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$b^2 = 7$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$

8

جد معادلة القطع الناقص الذي
بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$
والنسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{3}$ ومركزه
نقطة الاصل

القطع الزائد:

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

القطع الناقص:

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$\frac{c}{\text{زائد}} = \frac{c}{\text{ناقص}}$$

$$c = 4$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\text{كبير}}{\text{صغير}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{a}{b}$$

$$[3a = 5b] \div 5 \Rightarrow b = \frac{3}{5}a \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = \left(\frac{3}{5}a\right)^2 + (4)^2$$

$$[a^2 = \frac{9}{25}a^2 + 16] \cdot 25$$

$$25a^2 - 9a^2 = 400 \Rightarrow 16a^2 = 400 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$[16a^2 = 400] \div 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b = \frac{3}{5}a \quad \text{نعوض المعادلة (1)}$$

$$b = \frac{3}{5}(5) \Rightarrow b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



إذا أعطى البعد بين البؤرتين وأحد الرأسين بالترتيب فأن:

ملاحظة ومثال

$$2c = \text{مجموع البعدين}$$

$$2a = \text{حاصل طرح البعدين}$$

مثال 9 أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت ان أحد الرأسين يبعد بالبعد 9، 1 وحدات بالترتيب عن البؤرتين وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين.

$$\text{المجموع} \Rightarrow [2c = 10] + 2 \Rightarrow 9 + 1 = 2c$$

$$c = 5$$

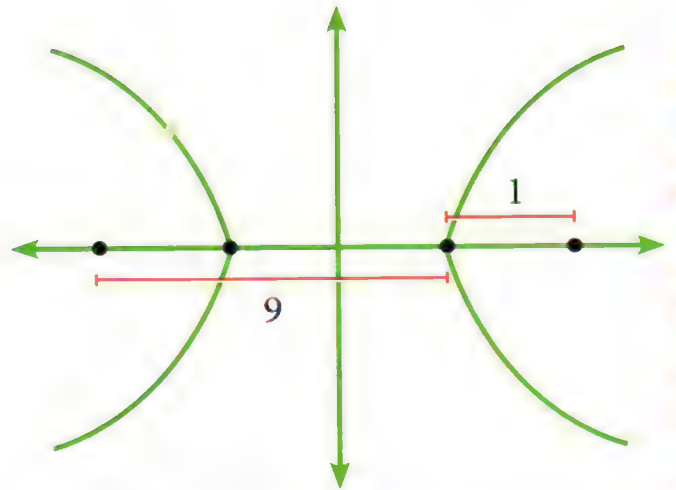
$$\text{الطرح} \Rightarrow [2a = 8] + 2 \Rightarrow 9 - 1 = 2a$$

$$a = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3$$



رسم توضيحي تم اخذه على محور السينات

لم يحدد موقع البؤرة

$$\text{سينات} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{صادات} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

ملاحظة ومثال إذا أعطى إحداثي نقطة (x, y) أحد الإحداثيات مجهول نعوض النقطة بالمعادلة ونجد المجهول.

أما إذا طلب طول نصف القطر البؤري الايمن PF_1 وهو البعد بين النقطة والبؤرة الموجبة F_1 والاخر نصف القطر البؤري الايسر PF_2 وهو البعد بين النقطة والبؤرة السالبة.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12 + 4$$

$$c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$F_1(4, 0), \quad P(6, 2\sqrt{2}) \quad \text{(قبة L)}$$

$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12}$$

$$PF_1 = 2\sqrt{3} \quad \text{وحدة}$$



مثال 10 النقطة $P(6, L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد: أولاً: قبة (L) .

النقطة $P(6, L)$ تحقق معادلة القطع الزائد.

$$x^2 - 3y^2 = 12$$

$$(6)^2 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 36 - 3L^2 = 12$$

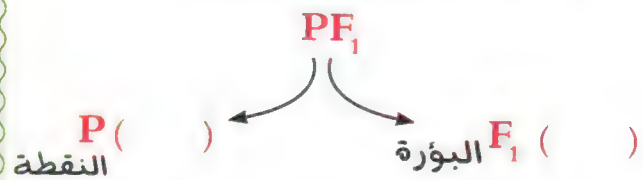
$$36 - 12 = 3L^2$$

$$[24 = 3L^2] \div 3$$

$$L^2 = 8 \quad \text{بالجذر}$$

$$L = \pm 2\sqrt{2}$$

ثانياً: نصف القطر البؤري الايمن PF_1 للقطع المرسوم من الجهة اليمنى للنقطة P



نجد F_1 أولاً ثم نجد المسافة بين F_1 والنقطة P

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \quad a^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad b^2 = 4$$

11 مثال

قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمه $h, k \in \mathbb{R}$.

معادلة السؤال (التي تحوي مجاهيل)

$$[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90$$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$$

$$\frac{90}{h} = 18 \Rightarrow h = \frac{90}{18} \Rightarrow h = 5$$

$$\frac{90}{k} = 10 \Rightarrow k = \frac{90}{10} \Rightarrow k = 10$$

إستراحة شعرية:

ويا ليت أبواب المدينة كلها
تُسدُّ وبابٌ في فؤادك يفتح

$$[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1, \quad a^2 = 64, \quad b^2 = 36$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

$$c = 2\sqrt{7}$$

القطع الزائد:

$$2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

زائد $a = 3\sqrt{2}$

بؤرتاه	تنطبقان	على بؤرة القطع الناقص
زائد c	=	ناقص c

$$c = 2\sqrt{7} \quad \text{زائد}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{28 - 18}$$

$$b = \sqrt{10} \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$$

ايجاد معادلة القطع الزائد باستخدام التعريف

أولاً : نجد البؤرة F_1 والبؤرة F_2

ثانياً : نستخدم قانون البعد بين نقطتين

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

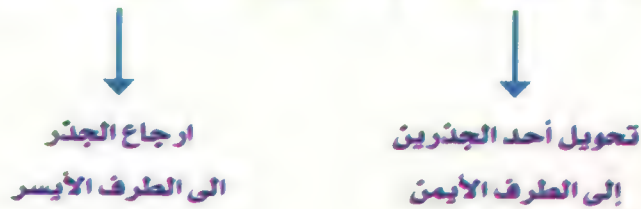
$$PF_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

* هناك عدة خطوات لحل السؤال :

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين



” التحضير اليومي “

سر من اسرار التفوق
فلا تهمل هذا السر

WWW.IQ-RES.COM

مثال 12 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(2, \sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين والقيمه المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه $= 4$ وحدات .

$$\begin{array}{ll} (x_1, y_1) & (x, y) \\ F_1 (2\sqrt{2}, 0) & F_1 (2\sqrt{2}, 0) \\ F_2 (-2\sqrt{2}, 0) & F_2 (-2\sqrt{2}, 0) \end{array}$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right| = 2a \quad \text{القانون}$$

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + (y - 0)^2} = \pm 4 \quad \text{التعويض}$$

هذا الجذر يبقى ننقل الجذر للطرف الاخر

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2} \quad \text{تربيع الطرفين}$$

$$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2} + (x + 2\sqrt{2})^2 + y^2$$

هذا الجذر حذف مع التربيع هذا الطرف مربع حدانية

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 16 \pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 \quad \text{فتح القوس}$$

ارجاع الجذر الى الطرف الاصيلي

$$\pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 16 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}x \quad \text{التصفية}$$

$$[\pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x] \div 8$$

$$\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = (2 + \sqrt{2}x) \quad \text{تربيع الطرفين}$$

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}x + 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 - y^2 = 8 - 4 \Rightarrow [x^2 - y^2 = 4] \div 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$



الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الزائد والربط بين القطوع الثلاثة

سؤال 2 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$.

(2001 - د (1))

القطع الناقص: $\left[\frac{3x^2}{120} + \frac{5y^2}{120} = \frac{120}{120} \right] \div 120$

$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$, $a^2 = 40$, $b^2 = 24$
((سينات))

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$
 $c = \sqrt{40 - 24} = \sqrt{16}$
 $c = 4$

القطع الزائد:

$\frac{C}{\text{زائد}} = \frac{C}{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 4$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$
 $\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 4] \div 2$
 $a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
 $b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$
 $b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

سؤال 1 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$.

(1997 - د (2))

القطع الناقص: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

$a^2 = 36$, $b^2 = 20$ ((سينات))

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$
 $c = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16}$
 $c = 4$

القطع المكافئ:

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4$

القطع الزائد: $\frac{C}{\text{زائد}} = \frac{C}{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 4$

$P = a \Rightarrow a = 2$
زائد مكافئ

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
 $b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$
 $b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

سؤال 3

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين الهكافئين $y^2 = 20x$, $y^2 = -20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والرافق يساوي (2) وحدة.

القطع الهكافي:

$$y^2 = 20x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(5, 0)$$

$$y^2 = -20x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(-5, 0)$$

القطع الزائد:

$$C = P \Rightarrow c = 5$$

زائد مكافئ

الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والرافق

$$[2a - 2b = 2] \div 2$$

$$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \quad (1)$$

نعويض

$$c^2 = a^2 + b^2$$

مربع حدانية

$$(5)^2 = (1+b)^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 1 + 2b + b^2 + b^2$$

$$2b^2 + 2b + 1 - 25 = 0$$

$$[2b^2 + 2b - 24 = 0] \div 2$$

$$b^2 + b - 12 = 0$$

$$(b+4)(b-3) = 0$$

لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل $b+4=0$ أما

نعوض في معادلة (1) $b-3=0 \Rightarrow b=3$ أو

$$a = 1 + b = 1 + 3 \Rightarrow a = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

ملاحظة

حرف العطف (و) في اللغة العربية ((الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والرافق)) تحمل وجهين:

$$2a - 2b = 2 \leftarrow \text{الأول}$$

$$2b - 2a = 2 \leftarrow \text{الثاني}$$

تم حل السؤال على الاحتمال الأول وسنتطرق الى الوجه الثاني من الحل.

$$[2b - 2a = 2] \div 2$$

$$b - a = 1 \Rightarrow b = 1 + a \quad (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(5)^2 = a^2 + (1+a)^2$$

مربع حدانية

$$25 = a^2 + 1 + 2a + a^2$$

$$2a^2 + 2a - 24 = 0 \div 2$$

$$a^2 + a - 12 = 0$$

$$(a+4)(a-3) = 0$$

لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل $a+4=0$

$$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 1 + a = 1 + 3 = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 5 جد معادلة القطع الزائد الذي

يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$.

القطع الناقص: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

((سينات)) $a^2 = 49$, $b^2 = 24$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$
 $c = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25}$
 $c = 5$

القطع الزائد:
 قال يمر وكل يمر a في القطع الزائد

$a = 5$
 $\frac{2c}{2b} = \frac{5}{4} [4c = 5b] \div 4 \Rightarrow c = \frac{5}{4}b \dots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2$
 $\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = (5)^2 + b^2$
 $\left[\frac{25}{16}b^2 = 25 + b^2\right] \cdot 16 \Rightarrow 25b^2 = 400 + 16b^2$
 $25b^2 - 16b^2 = 400 \Rightarrow 9b^2 = 400$

$b^2 = \frac{400}{9}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1$

سؤال 4 جد معادلة القطع الزائد الذي

بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين.

2002 - د (2)

القطع الناقص: $\left[\frac{x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}\right] \div 36$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$, $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

القطع الزائد:

رأسا القطع الناقص	هما	بؤرتاه
$\frac{a^2}{\text{ناقص}}$	$=$	$\frac{c^2}{\text{زائد}}$

$c = 6$
 $\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$
 $\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 6] \div 2$
 $a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
 $b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$
 $b^2 = 27$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

سؤال 7 جد معادلة القطع المخروطي الذي محوره هـ المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه $(-5, 0)$ واحـد رأسيه $(3, 0)$.
(2004 - د (2) 2005 - تمهيدى 2006 - د (2) 2008 - د (2) 2014 - د (3)

$$c = 5 \rightarrow (-5, 0) \text{ البؤرة}$$

$$a = 3 \rightarrow (3, 0) \text{ الرأس}$$

$a < c$ «أصغر» أي ان القطع زائد

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} \Rightarrow b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 8 جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات وطول محوره التخيلي (4) وحدات .
2007 تمهيدى

(نقطة التقاطع مع محور السينات) $y = 0$

$$2x - 0 = 8 \Rightarrow [2x = 8] \div 2 \Rightarrow x = 4$$

$$(4, 0) \rightarrow c = 4$$

$$2b = \text{طول محوره التخيلي} \Rightarrow [2b = 4] \div 2 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$a^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

سؤال 6 قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ علماً ان محوريها على المحورين الاحداثيين .

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

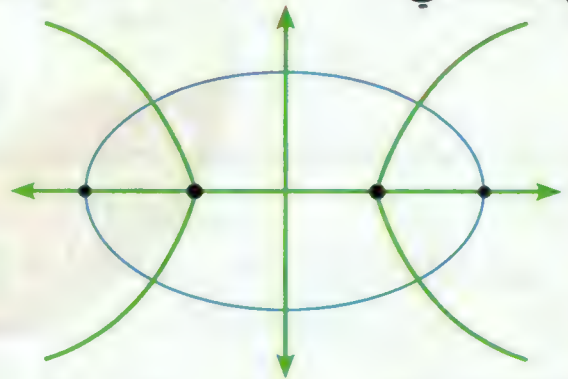
القطع الناقص:

$$a^2 = 25 \rightarrow a = 5, b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9}$$

$$c = \sqrt{16} \Rightarrow c = 4$$

رسم توضيحي



القطع الزائد:

$$a = c \Rightarrow a = 4 \text{ للزائد ناقص}$$

$$c = a \Rightarrow c = 5 \text{ للزائد ناقص}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3 \text{ للزائد}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 4, b^2 = 32, c = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بالجذر

$$c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$$

القطع المكافئ:

$$y^2 = -16x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$$

$$P = 4$$

القطع الناقص بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$c = c \Rightarrow c = 6$$

زائد ناقص

$$P = b \Rightarrow b = 4$$

مكافئ ناقص

* كل يمس في القطع الناقص اما a أو b هنا
اصبحت b لسببين:

① لأن a يجب ان تكون أكبر من c إذا
اصبحت a=4 تكون أصغر من c وهي (6).

② لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات
والذي يخالف البؤرة هو قطب b

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 4^2 + 6^2$$

$$a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$$

سؤال 9 جد معادلة القطع الزائد الذي
بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين
 $y^2 = 20x$ و $y^2 = -20x$ وطول محوره
المرافق (8) وحدات.

2005 - د (1) 2008 - د (1) 2015 - د (4) وصافة

القطع المكافئ:

$$y^2 = 20x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5$$

F(5,0)

$$y^2 = -20x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 20 \div 4 \Rightarrow P = 5$$

F(-5,0)

القطع الزائد: $P = c \Rightarrow c = 5$

$$2b = 2b \Rightarrow [2b = 8] \div 2$$

$$b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$a = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$8y^2 - x^2 = 32$$

$$y^2 + 16x = 0$$

القطع الزائد:

$$[8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

سؤال 12 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين.

2007
خارج القطر

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$$

$$V_1 (10, 0), V_2 (-10, 0)$$

القطع الزائد:

$$\frac{\text{رأسا القطع الناقص}}{a} = \frac{\text{القطع الزائد بؤرتاه هما}}{c}$$

$$c = 10 \text{ للزائد}$$

$$\text{طول محوره الحقيقي} = 2a \Rightarrow [2a = 12] \div 2$$

$$a = 6 \text{ للزائد}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{100 - 36}$$

$$b = \sqrt{64} \Rightarrow b = 8$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

سؤال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه (8) وحدات ورأساه بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2007 - د (1)

القطع الزائد:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \text{ سينات}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

القطع الناقص:

$$\frac{\text{ناقص}}{a} = \frac{\text{زائد}}{c} \Rightarrow a = 5$$

$$\text{البعد بين بؤرتيه} = 2c \Rightarrow [2c = 8] \div 2$$

$$c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

سؤال 14 جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 144$ ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة.

(2009 - د 1)

القطع الزائد:

$$[9y^2 - 16x^2 = 144] \div 144$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad a^2 = 16, b^2 = 9$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25 \rightarrow c = 5 \rightarrow F_1 (0, 5), F_2 (0, -5)$$

القطع الناقص:

القطع الناقص يمر من بؤرة الزائد

(0, 5)

$$b = 5 \quad \text{أو} \quad a = 5$$

الجزء المقطوع يمر من محور السينات

$$[2a = 12] \div 2 \quad a = 6$$

$$[2b = 12] \div 2 \quad b = 6$$

الأكبر $a = 6 \leftarrow$ سينات

الأصغر $b = 5 \leftarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

سؤال 13 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $(\frac{1}{2})$

2008
تمهيدي

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, a^2 = 25, b^2 = 9, c = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4 \quad \text{للقطع الناقص}$$

القطع الزائد:

بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص

c
ناقص

$$c = 4$$

$$\frac{\text{طول محوره الحقيقي}}{\text{البعد بين بؤرتيه}} = \frac{2a}{2c} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 4] \div 2$$

$$a = 2 \quad \text{للزائد}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

سؤال 16 جد معادلة القطع الهخروطي الذي رأسه نقطة الأصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي (3) ويبر بالنقطة (0,2).

2016
تمهيدي

* القطع زائد لأن $e > 1$

الاختلاف المركزي أكبر من (1)

(رأس صادات) $a = 2 \rightarrow (0,2)$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{c}{2}$$

$$c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 4}$$

$$b = \sqrt{32} \Rightarrow b^2 = 32$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

قال الشاعر:

دع حب أو من كلفت بحبه
ما الحب إلا للحبيب الآخر
ما قد تولد لا ارتجاع لطيبه
هل غائب اللذات مثل الحاضر

سؤال 15 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ وبمس دلبل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 + 8y = 0$.

2015 - د (3)

القطع الناقص:

$$[25x^2 + 9y^2 = 225] \div 225$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad a^2 = 25, b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

القطع المكافئ:

$$x^2 = -8y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد: $c = c \Rightarrow c = 4$
ناقص زائد

$$P = a \Rightarrow a = 2$$

مكافئ زائد

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

سؤال 17

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرته تقعان على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي (18) وحدة وبؤرته تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد $x^2 - 2y^2 = 6$.

القطع الزائد:

$$[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6$$

2014

نازحين

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1, \quad a^2 = 6, b^2 = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3$$

$$c^2 = 9 \rightarrow c = 3$$

القطع الناقص:

$$\frac{c}{\text{ناقص}} = \frac{c}{\text{زائد}}$$

$$c = 3$$

مجموع طولي محوريه $[2a + 2b = 18] \div 2$

$$a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(9 - b)^2 = b^2 + (3)^2$$

$$81 - 18b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 18b = 81 - 9$$

$$[18b = 72] \div 18 \Rightarrow b = 4$$

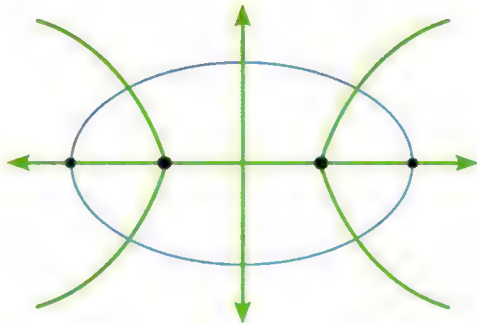
$$a = 9 - b$$

$$a = 9 - 4 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 18

جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الاخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة وطول المحور الحقيقي يساوي (6) وحدة طول.



القطع الزائد:

$$[2a = 6] \div 2$$

$$a = 3 \quad \text{زائد}$$

القطع الناقص:

$$[2a = 6\sqrt{2}] \div 2$$

$$a = 3\sqrt{2} \quad \text{ناقص}$$

$$\frac{a}{\text{زائد}} = \frac{c}{\text{ناقص}} \rightarrow c = 3 \quad \text{ناقص}$$

$$\frac{a}{\text{ناقص}} = \frac{c}{\text{زائد}} \rightarrow c = 3\sqrt{2} \quad \text{زائد}$$

الناقص

الزائد

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$$

$$b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$$

$$b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$$

سؤال 19

عَينِ النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ والتي تبعد من البؤرة في الفرع الايمن بهقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة.

(2005 - د 2)

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a^2 = 3, b^2 = 1, c = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3 + 1$$

$$c^2 = 4$$

$$c = 2$$

$$F_1 (2, 0)$$

$$P (x, y)$$

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$\frac{1}{3} = (x-2)^2 + y^2$$

مربع حدانية

$$\left[\frac{1}{3} = x^2 - 4x + 4 + y^2 \right] \cdot 3$$

$$1 = 3x^2 - 12x + 12 + 3y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 11 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

نتخلص من y^2 ونجدها من معادلة القطع

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{3} - 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$3x^2 + 3\left(\frac{x^2}{3} - 1\right) - 12x + 11 = 0$$

$$3x^2 + x^2 - 3 - 12x + 11 = 0$$

$$[4x^2 - 12x + 8 = 0] \div 4$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$y^2 = \frac{x^2}{3} - 1 \quad \text{عندما } x=1$$

$$y^2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \quad \text{بُهل } \notin \mathbb{R} \quad \text{عندما } x=2$$

$$y^2 = \frac{2^2}{3} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \quad \text{بالجذر}$$

توحيد مقامات

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_1 \left(2, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad P_2 \left(2, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

إستراحة شهرية:

وهواك في قلب الظنون حقيقة

لا ريب فيه وحب غيرك باطل

إن كان حبك في الفؤاد فريضة

فسواك في شرع الغرام نوافل



$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow \left[4P = \frac{4}{5} \right] \div 4$$

$$P = \frac{1}{5} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

القطع الزائد:

$$P = c \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

مكافئ زائد

$$[5y^2 - 4x^2 = h] \div h$$

$$\frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1$$

$$a^2 = \frac{h}{5}, b^2 = \frac{h}{4}, c = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}$$

توحيد مقامات

$$\frac{1}{25} = \frac{4h + 5h}{20} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9h}{20}$$

$$h = \frac{20}{9 \times 25} \Rightarrow h = \frac{4}{45}$$

سؤال 20 لتكن $x^2 - ky^2 = 3$ تمثيل معادلة قطع زائد احدي بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ جديبه k .

2007 - د (1)

$$y^2 = -8x$$

القطع المكافئ:

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

$$c = P$$

مكافئ زائد

$$c = 2$$

القطع الزائد:

$$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$$

$$a^2 = 3, b^2 = \frac{3}{k}, c = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(2)^2 = 3 + \frac{3}{k}$$

$$4 = 3 + \frac{3}{k} \Rightarrow 4 - 3 = \frac{3}{k} \Rightarrow 1 = \frac{3}{k}$$

$$k = 3$$

سؤال 21 لتكن $5y^2 - 4x^2 = h$ معادلة قطع زائد واحد بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $4y - 5x^2 = 0$ جديبه h .

$$4y - 5x^2 = 0$$

القطع المكافئ:

$$[5x^2 = 4y] \div 5$$

2003 - د (1)

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$



النوع الثالث من الأسئلة (انسحاب محاور القطع الزائد)

* قطع زائد محوره الحقيقي يوازي محور (y)

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

المعادلة

o (h,k)

المركز:

الرأسان:

$$\bar{V}_1 (h, a+k) \quad \bar{V}_2 (h, -a+k)$$

البؤرتان:

$$\bar{F}_1 (h, c+k) \quad \bar{F}_2 (h, -c+k)$$

* قطع زائد محوره الحقيقي يوازي محور (x)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المعادلة

o (h,k)

المركز:

الرأسان:

$$\bar{V}_1 (a+h, k) \quad \bar{V}_2 (-a+h, k)$$

البؤرتان:

$$\bar{F}_1 (c+h, k) \quad \bar{F}_2 (-c+h, k)$$

خطوات حل السؤال

1 نحدد (a^2) و (b^2) من المعادلة و a^2 هو دائماً في المقام الأول.

2 نستخدم قانون $c^2 = a^2 + b^2$ لإيجاد قيمة (c).

3 نجد (h, k).

4 نجد المركز والرأسان والبؤرتان حسب القانون الوارد اعلاه.

5 $2a$ = طول المحور الحقيقي

$2b$ = طول المحور الحقيقي

6 قانون الاختلاف المركزي نفسه $(e = \frac{c}{a})$



موقع طلاب العراق



WWW.IQ-RES.COM



@iQRES



/iQRES

موقع طلاب العراق



مثال 2 عين المركز وبؤرتا ورأسا القطع الزائد الاتي ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي:

$$2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8 \div 8$$

$$[2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8] \div 8$$

$$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بالجذر

$$c^2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

$$k = -1, h = 1$$

$$o(h, k) = (1, -1)$$

المركز: 1

$$\bar{F}_1(h, c+k) \Rightarrow (1, \sqrt{6} - 1)$$

البؤرتان: 2

$$\bar{F}_2(h, -c+k) \Rightarrow (1, -\sqrt{6} - 1)$$

الرؤسان: 3

$$\bar{V}_1(h, a+k) \Rightarrow \bar{V}_1(1, 2-1) \Rightarrow \bar{V}_1(1, 1)$$

$$\bar{V}_2(h, -a+k) \Rightarrow \bar{V}_2(1, -2-1) \Rightarrow \bar{V}_2(1, -3)$$

$$4 = 2a = \text{طول المحور الحقيقي وحدة}$$

$$2\sqrt{2} = 2b = \text{طول المحور المرافق وحدة}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1 \text{ الاختلاف المركزي: 6}$$

مثال 1 جد احداثيا المركز والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13} \text{ بالجذر}$$

$$h = -2, k = 1$$

$$o(h, k) \Rightarrow (-2, 1)$$

المركز: 1

$$\bar{F}_1(c+h, k) \Rightarrow \bar{F}_1(\sqrt{13} - 2, 1)$$

البؤرتان: 2

$$\bar{F}_2(-c+h, k) \Rightarrow \bar{F}_2(-\sqrt{13} - 2, 1)$$

الرؤسان: 3

$$\bar{V}_1(a+h, k) \Rightarrow \bar{V}_1(3 - 2, 1) \Rightarrow \bar{V}_1(1, 1)$$

$$\bar{V}_2(-a+h, k) \Rightarrow \bar{V}_2(-3 - 2, 1) \Rightarrow \bar{V}_2(-5, 1)$$

$$2a = 6 = \text{طول المحور الحقيقي وحدة}$$

$$2b = 4 = \text{طول المحور المرافق وحدة}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1 \text{ الاختلاف المركزي: 6}$$

مثال 3

جد البؤرتين والرأسين والمركز وطول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته :

$$16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$$

$$(16x^2 + 160x) + (-9y^2 + 18y) = 185$$

$$16(x^2 + 10x) - 9(y^2 - 2y) = 185$$

$$16(x^2 + 10x + 25) - 9(y^2 - 2y + 1) = 185 + 400 - 9$$

$$[16(x^2 + 5)^2 - 9(y^2 - 1)^2 = 576] \div 576$$

$$\frac{(x+5)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1$$

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow c = 10 \text{ بالجذر}$$

$$h = -5, k = 1$$

$$o(h, k) \Rightarrow (-5, 1)$$

$$\bar{F}_1(c+h, k) \Rightarrow \bar{F}_1(10-5, 1) \Rightarrow \bar{F}_1(5, 1)$$

$$\bar{F}_2(-c+h, k) \Rightarrow \bar{F}_2(-10-5, 1) \Rightarrow \bar{F}_2(-15, 1)$$

$$\bar{V}_1(a+h, k) \Rightarrow \bar{V}_1(6-5, 1) \Rightarrow \bar{V}_1(1, 1)$$

$$\bar{V}_2(-a+h, k) \Rightarrow \bar{V}_2(-6-5, 1) \Rightarrow \bar{V}_2(-11, 1)$$

$$4 \text{ طول المحور الحقيقي } 12 = 2a = \text{وحدة}$$

$$5 \text{ طول المحور المرافق } 16 = 2b = \text{وحدة}$$

$$6 \text{ الاختلاف المركزي: } e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = > 1$$

صفحاتنا على الفيس بوك

f / iQRES

f / NTAAj.iQ

1 المركز:

2 البؤرتان:

3 الرأسان:

WWW.iQ-RES.COM

الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق



موقع طلاب العراق

” (... شارك رابط موقعنا ...)
مع اصدقائك لتعم الفائدة
ولا تنسونا من صالح دعائكم
“

نتائج

كتب

ملازم

أخبار

أسئلة

التعليم العالي

وزارة التربية

تابعونا ..



@iQRES



/ iQRES



/ NTAAj.iQ

كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي

6Th Scientific



The Master
Haidar Walid
07701780364

2019



Warning :-

We warn against reproducing them, and it is not permissible to do so because they are legitimate, legal, unjustified and quire Books and documents Note that our lieutenant has a trademark from the Ministry of Industry Department of Industrial Development and Organization considered forged.

Part One